به نام خدا

۱) نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^{x^{۲}}-۱-x^{۲}}{x^{۳}}, & x\neq ۰\\ ۰, & x=۰\end{cases}$$

۲) نشان دهید حداقل یک $c\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $\ln(e^{c}+۲)=c^{۲}-c+۱$.

۳) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} -۲, & \sinh(x)<-۲\\ \sinh(x), & |\sinh(x)|\leq ۲\\ ۲, & \sinh(x)>۲\end{cases}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ب) نشان دهید که عدد حقیقی $c>۰$ وجود دارد به طوری که $f(c)=c^{۲}$.

۴) الف) نشان دهید که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x\ln|x|, & x\neq ۰\\ ۰, & x=۰\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ب) نشان دهید که $c<۰$ وجود دارد که $\ln|c|+\frac{۱}{c}=۰$.

۵) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{\ln k}{x-۱}} & x\neq ۰\\ ۵ & x=۰\end{cases}$ مفروض است. نشان دهید که

٦) به ازای چه مقداری از c تابع زیر در نقطه $x = ۰$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - ۱)\coth(x), & x \neq ۰ \\ ۰, & x = ۰ \end{cases}$$

//

۷) فرض کنید $f : (-۱, ۱) \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ \tanh^{-۱} x, & x \in (-۱, ۱) - \mathbb{Q} \end{cases}$
تعریف شده باشد. مشتق‌پذیری تابع f برای همه نقاط $x \in \mathbb{R}$ را بررسی کنید.

۸) فرض کنید توابع f و g در صفر مشتق‌پذیر، $g(۰) = ۱$ و

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ f(a+b) = f(a)g(b) + g(a)f(b).$$

نشان دهید f همه جا مشتق‌پذیر است.

۹) مشتق‌پذیری تابع f با ضابطه‌ی زیر را در $x = ۰$ بر حسب مقادیر $\alpha \in \mathbb{R}$ با ذکر دلیل مورد بحث قرار دهید.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{\alpha}}, & x \neq ۰ \\ ۰, & x = ۰ \end{cases}$$

۱۰) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq ۱ \\ \sin(x - ۱) - (۱ - x)^{۱-\sqrt{۲}} \exp(\frac{۱}{x-۱}), & x < ۱ \end{cases}$$

مفروض است.
ثابت کنید که این تابع در نقطه‌ی $x_۰ = ۱$ مشتق‌پذیر است.

۱۱) نشان دهید که تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^۲ \ln x, & x > ۰ \\ \tanh^۲ x, & x \leq ۰ \end{cases}$
بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ضابطه‌ی تابع مشتق را تعیین کنید.
///

۱۲) همگرایی مطلق، همگرایی مشروط و یا واگرایی سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=۲}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱}{\ln n}.$$

۱۳) فرض کنید $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ یک سری همگرای مطلق و $\{b_n\}$ دنباله‌ای همگرا به عدد $\ell \neq ۰$ باشد. نشان دهید $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ همگرای مطلق است.

۱۴) با ذکر دلیل همگرایی یا واگرایی هر سری را تعیین کنید.

$$\text{(الف}\ \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{n+۲}{n^۲+۲n-۹۲}\right)^{n^۲} \qquad \text{(ب}\ \sum_{n=۱}^{\infty} \left(۱-\sqrt[n]{۲}\right) \qquad \text{(ج}\ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۱+a^n};\ a>۰.$$

۱۵) با ذکر دلیل همگرایی یا واگرایی هر سری را تعیین کنید.

$$\text{(الف}\ \sum_{n=۲}^{+\infty} (-۱)^n \frac{\ln n}{n-\ln n} \qquad \text{(ب}\ \sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{۱}{\cosh n}.$$

۱۶) کلیه مقادیر $p \in \mathbb{R}$ را که به ازای آن سری‌های زیر همگرا هستند، مشخص کنید.

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n^{۲n}}, \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{n+p}{n}\right)^{n^۲}$$

//

۱۷) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که $a_۱ = ۳$ و برای $n \geq ۱$، $a_{n+۱} = \sqrt{۷a_n - ۱۰}$.

الف) ثابت کنید دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگراست و مقدار حد دنباله را بدست آورید.

ب) همگرایی یا واگرایی سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۳}{a_n}\right)^n$ را بررسی کنید.

۱۸) الف) کلیه مقادیر $a > ۰$ را تعیین کنید که برای آنها دنباله‌ی $\{a_n\}$ با دستور $a_n = \dfrac{a^n}{a^n + ۴^n}$ همگرا باشد. حد دنباله را تعیین کنید.

ب) کلیه مقادیر $a > ۰$ را تعیین کنید که برای آنها سری $\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \dfrac{a^n}{a^n + ۴^n}$ همگرا باشد.

۱۹) نشان دهید که دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_{n+۱} = ۱ + \frac{۱}{a_n}$، $a_۱ = ۱$، همگرا است و حد آن را محاسبه کنید.

۲۰) نشان دهید که دنباله‌ی $\{t_n\}$ با ضابطه‌ی $t_n = \dfrac{۱}{n+۱} \sum_{k=۱}^{n} \dfrac{۱}{k}$، $n \in \mathbb{N}$، همگرا است.

۲۱) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای صادق در شرایط زیر است

$$۰ < a_۲ < a_۱ \quad \text{و} \quad \forall\, n \geq ۳,\ a_n^۲ \geq a_{n-۱} a_{n+۱}.$$

نشان دهید که این دنباله همگرا است.

۲۲) گزاره‌های زیر را رد یا اثبات کنید.

الف) اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $۰ < a_n < b_n$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{b_n\}$ نیز واگرا است.

ب) اگر $a_n \to a$ و $b_n \to b$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n < b_n$ آن‌گاه $a \leq b$.

//