(دنباله ها)

۱. نشان دهید که $\lim \frac{n}{۲+\cos n} = \infty$.

۲. نشان دهید دنبالهٔ $b_n = (-۱)^n + \cos(\frac{n\pi}{۵})$ واگرا است.

۳. فرض کنید a، b و c سه عدد حقیقی نامنفی باشند. نشان دهید که دنبالهٔ $a_n := \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$ همگراست.

۴. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای صادق در شرایط زیر است.

$$\forall n \geq ۳, \quad a_n^۲ \geq a_{n-۱}a_{n+۱} \qquad \text{و} \qquad ۰ < a_۲ < a_۱$$

نشان دهید که این دنباله همگراست.

۵. ثابت کنید که هرگاه دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی باشد و $\lim a_n = a$، آنگاه برای هر n، $a_n \leq a$.

۶. نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ تعریف شده به صورت

$$a_n = \frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{n+۱}) + \frac{۱}{۲^۲}(۱-\frac{۲}{n-۱}) + \cdots + \frac{۱}{۲^n}(۱-\frac{n}{n+۱})$$

همگراست.

۷. فرض کنید $\lim a_n = a$ و $\lim b_n = -\infty$. نشان دهید که $\lim \frac{a_n}{b_n} = ۰$.

۸. اگر داشته باشیم $\lim a_n = a > ۰$، نشان دهید که $\lim \sqrt[n]{a_n} = ۱$.

۹. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله ای بازگشتی تعریف شده به صورت زیر است.

$$a_۱ = ۱, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+۱} = \frac{۱}{۲}a_n + ۲$$

نشان دهید که این دنباله همگراست.

۱۰. همگرایی دنبالهٔ $a_1=\frac{1}{2}$ و $a_{n+1}=a_n^2+\frac{1}{5}$ را بررسی کنید.

۱۱. الف) نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ که به صورت زیر تعریف می شود همگرا به عدد ۴ است.

$$a_1=2,\qquad a_{n+1}=\sqrt{4+3a_n}$$

ب) فرض کنید $\{b_n\}$ دنباله ای باشد که به صورت زیر تعریف می شود. تحقیق کنید که دنبالهٔ $\{b_n\}$ همگراست یا واگرا. (با ذکر دلیل)

$$b_{2n-1}=a_n \quad , \quad b_{2n}=\sqrt[2n]{8^n+16^n}$$

(حد و پیوستگی)

۱۲. فرض کنید f و g دو تابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ هستند. اگر برای هر $x\in\mathbb{Q}$، $f(x)=ag(x)$ ($a\in\mathbb{R}$ ثابت) نشان دهید که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f(x)=ag(x)$.

۱۳. الف) نشان دهید معادلهٔ $\tan^{-1}x=x$ دارای دقیقاً یک ریشه است.

ب) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ \tan^{-1}x & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ تعریف شده باشد، نشان دهید f در $x=0$ مشتق پذیر است حال آنکه در هیچ نقطهٔ دیگری f پیوسته نیست.

۱۴. فرض کنید f در یک همسایگی از صفر تعریف شده است. نشان دهید که در صورت وجود هر یک از دو حد $\lim_{x\to 0} f(x+\sin x)$ و $\lim_{x\to 0} f(2x)$، دیگری نیز وجود داشته و مقدار آنها با یکدیگر برابراند.

۱۵. فرض کنید $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دو تابع پیوسته بر $\mathbb{R}$ هستند. اگر برای هر $x\in\mathbb{Q}$ (اعداد گویا) $f(x)=g(x)$، ثابت کنید که برای هر $x\in\mathbb{R}$ نیز $f(x)=g(x)$.

۱۶. حد زیر را محاسبه نمایید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a+2x)-2\tan(a+x)+\tan(a)}{x^2} \quad \text{و یا} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots}\right.$$

۱۷. فرض کنید f تابعی پیوسته باشد که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) > 0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. نشان دهید که عددی مانند $y \in \mathbb{R}$ موجود است به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(y) \geq f(x)$. (به عبارت دیگر ماکزیمم مطلق f روی $\mathbb{R}$ موجود است.)

۱۸. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی فرد و $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی زوج باشند و برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ در شرط $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ صدق کنند.
الف) اگر f و g در $x = 0$ پیوسته باشند و $g(0) = 1$ ثابت کنید که f همه جا پیوسته است.
ب) اگر $f'(0) = 1$ و $g'(0) = 0$، ثابت کنید که f همه جا مشتق پذیر است و $f'(x)$ را بیابید.

۱۹. اگر تابع f در a و تابع g در $f(a)$ پیوسته باشند، ثابت کنید که تابع $g \circ f$ در a پیوسته است.

۲۰. فرض کنید $f : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0) = f(4\pi)$. نشان دهید نقطه ای مانند $c \in [\pi, 3\pi]$ وجود دارد که $f(c-\pi) = f(c+\pi)$.

(مشتق)

۲۱. فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو تابع مشتق پذیر بوده، برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) > g'(x)$. برای $a \in \mathbb{R}$، اگر $f(a) = g(a)$ نشان دهید که برای هر $x < a$، $f(x) < g(x)$ و برای هر $x > a$، $f(x) > g(x)$.

۲۲. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر بوده، $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. اگر $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ زیر تعریف شود

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin\big(f(x)\big)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

نشان دهید که g بر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. ضابطهٔ تابع مشتق را تعیین نمایید.

۲۳. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی معکوس پذیر است و داشته باشیم

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x + f^{-1}(y)) = f(x) + y$$

الف) نشان دهید که اگر f در $x_\circ = \circ$ مشتق پذیر باشد آنگاه f همه جا مشتق پذیر است و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f'(x) = f'(\circ)$.
ب) تحت شرط فوق، نشان دهید که ثابت a یافت شود که $f(x) = ax$.

۲۴. ثابت کنید اگر تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد و $x_\circ \in (a,b)$ یک نقطهٔ می‌نیمم نسبی f روی (a,b) باشد، آنگاه $f'(x_\circ) = \circ$. آیا عکس مطلب فوق همواره درست است؟

۲۵. فرض کنید f در یک همسایگی حول نقطهٔ $x_\circ$ تعریف شده است. اگر $f'_+(x_\circ)$ و $f'_-(x_\circ)$ هر دو موجود باشند. نشان دهید که تابع f در $x_\circ$ پیوسته است (توجه کنید که لزوماً دو مشتق فوق با یکدیگر برابر نیستند).

۲۶. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد و برای $a, b \in \mathbb{R}$، $f'(a)f'(b) < \circ$. ثابت کنید که عددی چون c بین a و b وجود دارد که $f'(c) = \circ$.

۲۷. اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق پذیر باشد و اگر $f(a) = f(b)$، ثابت کنید که عددی چون c در بازهٔ (a,b) وجود دارد که $f'(c) = -\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

۲۸. ثابت کنید که برای هر $x > ۱$ یک $c \in (۱, x)$ وجود دارد که

$$\frac{x^۳ + x^۲ + x + ۱}{x^۴ + ۱} = \frac{۸c^۳}{(c^۴ + ۱)۲}$$

(راهنمایی: میتوانید از تابع $f(x) = \dfrac{x^۴ - ۱}{x^۴ + ۱}$ استفاده کنید.)

۲۹. تابع مشتق پذیر $f : (\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ مفروض است. فرض کنید $f(۱) = \circ$ و برای هر $x \in (\circ, \infty)$، $f'(x) = \dfrac{۱}{x}$. نشان دهید
الف) برای هر $a, b > \circ$، $f(ab) = f(a) + f(b)$.
ب) برای هر $a, b > \circ$، $f(\frac{b}{a}) = f(b) - f(a)$.

ج) برای هر $a > \circ$ و برای هر $r \in \mathbb{Q}^+$، $f(a^r) = rf(a)$.

د) برای هر $x > \circ$، $1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + x$.

۳۰. فرض کنید $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ تابعی فرد است. اگر f در $x = 1$ مشتق پذیر باشد ثابت کنید که f در $x = -1$ نیز مشتق پذیر است و مقدار دو مشتق با یکدیگر برابراند.

(انتگرال)

۳۱. با استفاده از تعریف نشان دهید که تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x = \circ \\ x & \circ < x \leq 1 \end{cases}$ بر بازهٔ $[\circ, 1]$ انتگرال پذیر است و مقدار انتگرال آنرا بدست آورید.

۳۲. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \int_e^{e^x} \frac{1}{1 + t^4} \, dt$ مفرض است. نشان دهید که f عکس پذیر بوده، تابع معکوس نیز تابعی مشتق پذیر است. مطلوبست تعیین $(f^{-1})'(\circ)$.

۳۳. فرض کنید $a \geq \circ$ و برای $x > \circ$ تابع f به صورت زیر تعریف شود. تعیین کنید به ازای چه مقادیری از a، $f''(1 - a) = 1$.

$$f(x) = \int_1^x (t + a)^t \, dt$$

۳۴. قضیه اساسی انتگرال را ثابت کنید.

۳۵. حد زیر را محاسبه کنید.
$$\lim_{t \to \circ^+} \left[\int_\circ^1 (1 + x)^t \, dx \right]^{\frac{1}{t}}$$

(توابع غیرجبری)

۳۶. فرض کنید $a_۱, \cdots, a_n$ اعداد حقیقی مثبت هستند. نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{a_۱^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{۱}{x}}=\sqrt[n]{a_۱\cdots\ a_n}$$

۳۷. مطلوبست محاسبهٔ هر یک از حدهای زیر.

(الف) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^x$ (ب) $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x}\int_۰^x(۱-\tan ۲t)^{\frac{۱}{t}}\,dt$

۳۸. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty}\int_۰^n(۱+\frac{x}{n})^n e^{-۲n}\,dx=۱$.

۳۹. الف) با فرض اینکه $A, B > ۰$، نشان دهید که تابع $f(x)=(A^x+B^x)^{\frac{۱}{x}}$ تابعی نزولی است.

ب) نشان دهید که $(x^b+y^b)^{\frac{۱}{b}} < (x^a+y^a)^{\frac{۱}{a}}$ ، برای هر $x, y > ۰$ و $۰ < a < b$.

(روشهای انتگرال گیری و انتگرالهای ناسره)

۴۰. مطلوبست محاسبهٔ هر یک از انتگرال های زیر.

(الف) $\int\frac{\sinh x}{e^x\cosh x}\,dx$

(ب) $\int\frac{۱+\tan^۲ x}{\tan x(۱+\tan x)}\,dx$

(ج) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲+۲x-۳}}$

(د) $\int e^{۲x}.e^{e^x}\,dx$

(ه) $\int_۱^{+\infty}\frac{x^۲-۲}{x^۳\sqrt{x^۲-۱}}\,dx$

(و) $\int\frac{\ln(x+۱)-\ln x}{x(x+۱)}\,dx$

(ز) $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

(ح) $\int\frac{\tan x\sqrt{\sec x}+\sec x\sqrt{\tan}}{\cos x}$

(ط) $\int\frac{۲\sin x\ln\left((\cos x)^{\cos x}\right)+۱}{\cos^۲ x}\,dx$

(ی) $\int x\tan^۲ x\,dx$

(ک) $\int\frac{dx}{(e^{۲x}+e^x+۱}^{\frac{۱}{۲}}$

۴۱. برای هر $n \in \mathbb{N}$، نشان دهید که $\int_{۰}^{۱} x(۱-x)^n \, dx = \frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}$.

۴۲. همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_{۰}^{+\infty} \frac{\cos^{۲} x}{\sqrt{x^{۴}+x}} \, dx$ را بررسی نمایید.

۴۳. همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_{۱}^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x\sqrt{۱+\ln x}} \, dx$ را بررسی و ادعای خود را ثابت نمایید.

۴۴. فرض کنید $I_n = \int_{۱}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^p} \, dx$ که در آن $p > ۱$ عددی ثابت و n یک عدد طبیعی است.

الف) نشان دهید I_n برای هر n همگراست.

ب) نشان دهید $I_{n+۱} = \frac{n+۱}{p-۱} I_n$ و در نتیجه $I_n = \frac{n!}{(p-۱)^{n+۱}}$.

۴۵. همگرایی یا واگرایی انتگرالهای زیر را تعیین کنید.

(الف) $\int_{۱}^{\infty} \frac{dx}{e^x(۱+\ln x)}$

(ب) $\int_{۰}^{\frac{\pi^{۲}}{۴}} \frac{dx}{\sin\sqrt{x}-۱}$

(سریهای عددی و سریهای توانی)

۴۶. همگرایی یا واگرایی هر یک از سریهای زیر را بررسی نمایید.

(الف) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[۳]{n^{۵}+n}}$

(ب) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{(-۱)^n}{n^{۲}+\sin^{۲}(n)}$

(ج) $\sum_{n=۱}^{+\infty} (\sqrt{n^{۴}+۱}-n^{۲})$

(د) $\sum_{n=۱}^{+\infty} \ln(\frac{n}{n+۲})$

(و) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$

(ه) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^4}$

(ح) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{7n^2-5}$

(ز) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+2^n}{6^{n+1}}$

(ط) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{10})}{n^3+5}$

۴۷. در هر یک از سریهای زیر بزرگترین دامنهٔ تغییرات x را به گونه ای تعیین نمایید که سری داده شده همگرا باشد.

(ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+x^2}$

(الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln x)^n}{n2^n}$

۴۸. تعیین کنید سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$ به ازای چه مقادیری از x همگرای مطلق، همگرای مشروط و یا واگراست.

۴۹. در هر یک از سریهای زیر، مقادیری از x را تعیین کنید که سری همگرای مطلق، همگرای مشروط یا واگرا باشد.

(ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!n^n}{(2n)!}x^n$

(الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

(د) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!}{3^{2n}(n!)^3}(x-\frac{1}{3})^n$

(ج) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}(2x+5)^n$

(ه) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$

۵۰. مجموعه مقادیری از x را بیابید که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(ax+b)^n}{n^{۱/۳} c^n}$ همگرا باشد. ($a, c >$ ۰)

۵۱. الف) بسط مک لورن $\int_{۰}^{x} \sin^{-۱} t \, dt$ را بدست آورید.

ب) با استفاده از (الف) $\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \sin^{-۱} x \, dx$ را به صورت یک سری عددی نمایش دهید.