به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات پایان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۳

---

۱. الف) قرار میدهیم $e^x = u$. در نتیجه $e^x dx = du$. پس $dx = \frac{du}{u}$ بنابراین

$$I = \int \frac{dx}{e^x + e^{۲x}} = \int \frac{du}{u(u+u^۲)} = \int \frac{du}{u^۲(۱+u)}$$

(۳ نمره)

با استفاده از روش تفکیک کسرها داریم

$$\frac{۱}{u^۲(۱+u)} = \frac{A}{u^۲} + \frac{B}{u} + \frac{C}{u+۱}$$

(۳ نمره)

که نتیجه میدهد $A = ۱$، $B = -۱$، $C = ۱$.

$$I = \int \frac{۱}{u^۲} du - \int \frac{۱}{u} du + \int \frac{۱}{u+۱} du$$

$$I = -\frac{۱}{u} - \ln|u| + \ln|۱+u| + c$$

(۳ نمره)

$$I = -e^{-x} - x + \ln(۱+e^x) + c$$

(۱ نمره)

ب) با استفاده از روش جز به جز قرار میدهیم

$$u = (\cos^{-۱} x)^۲,\ dv = dx$$

در نتیجه

$$du = ۲\cos^{-۱} x . \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}} dx,\ v = x$$

(۲ نمره)

$$I = \int (\cos^{-۱} x)^۲ dx = x.(\cos^{-۱} x)^۲ + \int x. \cos^{-۱} x . \frac{۲}{\sqrt{۱-x^۲}} dx$$

(۳ نمره)

مجدداً از روش جز به جز استفاده میکنیم و قرار میدهیم

$$u = \cos^{-۱} x,\ dv = \frac{۲x}{\sqrt{۱-x^۲}} dx$$

در نتیجه

$$du = \frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx,\ \ v = -۲\sqrt{۱-x^۲}$$

(۲ نمره)

$$I = x.(\cos^{-۱} x)^۲ - ۲\cos^{-۱} x.\sqrt{۱-x^۲} + ۲\int \sqrt{۱-x^۲}.\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}}dx$$

$$I = x.(\cos^{-۱} x)^۲ - ۲\cos^{-۱} x.\sqrt{۱-x^۲} - ۲x + C$$

(۳ نمره)

ج) از روش تغییر متغیر مثلثاتی استفاده میکنیم. قرار میدهیم
$x = ۲\cos\theta \longrightarrow dx = -۲\sin\theta d\theta$

(۳ نمره)

$$I = \int \frac{dx}{x^۲\sqrt{۴-x^۲}} = \int \frac{-۲\sin\theta}{۴\cos^۲\theta.\sqrt{۴-۴\cos^۲\theta}}d\theta$$

(۲ نمره)

$$I = -\frac{۱}{۴}\int \frac{۱}{\cos^۲\theta}d\theta = -\frac{۱}{۴}\int \sec^۲\theta d\theta = -\frac{۱}{۴}\tan\theta + C$$

(۳ نمره)

در نتیجه

$$I = -\frac{۱}{۴}.\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + C = -\frac{۱}{۴}.\frac{\sqrt{۱-\cos^۲\theta}}{\cos\theta} + C = -\frac{۱}{۴}.\frac{\sqrt{۱-(\frac{x}{۲})^۲}}{\frac{x}{۲}} + C$$

$$I = -\frac{۱}{۴}\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{x} + C$$

(۲ نمره)

۲. با ذکر دلیل مقدار $\lim_{x\to ۱}\dfrac{\displaystyle\int_{۰}^{\ln x}\frac{۲e^{۲t}}{۳+e^{۴t}}dt}{\pi-۴\tan^{-۱}x}$ را به دست آورید.

پاسخ: چون تابع $f(t)=\frac{۲e^{۲t}}{۳+e^{۴t}}$ پیوسته است بنا به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال تابع $g(x)=\displaystyle\int_{۰}^{x}f(t)dt$ مشتق‌پذیر است. همچنین تابع $\ln$ مشتق پذیر است. در نتیجه بنا به قاعده زنجیره ای تابع $h(x)=\displaystyle\int_{۰}^{\ln x}f(t)dt$ روی $(۰,+\infty)$ مشتق پذیر است و داریم

$$h'(x)=\frac{۱}{x}.\frac{۲e^{۲\ln x}}{۳+e^{۴\ln x}}$$

(۵ نمره)

همچنین

$$\lim_{x\to ۱}(\pi-۴\tan^{-۱}x)=\pi-۴\tan^{-۱}۱=۰$$

و

$$\lim_{x\to ۱}\int_{۰}^{\ln x}f(t)dt=\int_{۰}^{۰}f(t)dt=۰$$

(۵ نمره)

از طرفی

$$\lim_{x\to ۱}\frac{h'(x)}{\frac{-۴}{۱+x^۲}}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{x}\cdot\frac{۲e^{۲\ln x}}{۳+e^{۴\ln x}}}{\frac{-۴}{۱+x^۲}}=-\frac{۱}{۴}$$

(۵ نمره)

بنابراین همه شرایط قاعده هوپیتال برقرار است و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\displaystyle\int_{۰}^{\ln x}\frac{۲e^{۲t}}{۳+e^{۴t}}dt}{\pi-۴\tan^{-۱}x}=-\frac{۱}{۴}$$

(۵ نمره)

۳. نشان دهید برای هر $x > ۰$، $\frac{۱}{x+۱} < \ln(۱ + \frac{۱}{x})$.

پاسخ: راه حل اول: تابع $f(x) = \ln x$ را در نظر میگیریم. این تابع برای هر $x_۰ > ۰$ روی بازه $[۱, ۱ + \frac{۱}{x_۰}]$ پیوسته و روی بازه $(۱, ۱ + \frac{۱}{x_۰})$ مشتقپذیر است. در نتیجه بنا به قضیه مقدار میانگین $c \in (۱, ۱ + \frac{۱}{x_۰})$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{\ln(۱ + \frac{۱}{x_۰}) - \ln ۱}{\frac{۱}{x_۰}} = \ln'(c) = \frac{۱}{c}$$

(۱۰ نمره)

چون $۱ < c < ۱ + \frac{۱}{x_۰}$، $\frac{x_۰}{x_۰+۱} < \frac{۱}{c}$. در نتیجه

$$\frac{\ln(۱ + \frac{۱}{x_۰})}{\frac{۱}{x_۰}} > \frac{x_۰}{x_۰ + ۱}.$$

بنابراین

$$\ln(۱ + \frac{۱}{x_۰}) > \frac{۱}{x_۰ + ۱}.$$

(۱۰ نمره)

راه حل دوم: با توجه به اینکه $\ln(۱ + \frac{۱}{x}) = \ln \frac{x+۱}{x} = \ln(x + ۱) - \ln x$، میتوان تابع $f(x) = \ln x$ را روی بازه $[x_۰, x_۰ + ۱]$ در نظر گرفت و قضیه مقدار میانگین را به کار برد.

راه حل سوم: تابع $f(x) = \frac{۱}{x+۱} - \ln(۱ + \frac{۱}{x})$ را روی بازه $(۰, +\infty)$ در نظر میگیریم. تابع f روی این بازه مشتق پذیر است و

$$f'(x) = \frac{-۱}{(x + ۱)^۲} - \frac{\frac{-۱}{x^۲}}{\frac{x+۱}{x}} = \frac{-۱}{(x + ۱)^۲} + \frac{۱}{x(x + ۱)} = \frac{۱}{x(x + ۱)^۲} > ۰$$

(۵ نمره)

بنابراین تابع f روی $(۰, +\infty)$ صعودی است. (۵ نمره)

همچنین

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{x + ۱} - \ln(۱ + \frac{۱}{x}) = ۰$$

(۵ نمره)

بنابراین برای هر $x > ۰$، $f(x) < ۰$. یعنی $\frac{۱}{x+۱} < \ln(۱ + \frac{۱}{x})$. (۵ نمره)

۴. فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. ثابت کنید برای هر $a > ۰$ تساوی زیر برقرار است.

$$\int_e^{e^a} f(t\ln t)dt = \int_۰^{\ln a} e^{(t+e^t)} f(e^{(t+e^t)})dt$$

پاسخ: راه حل اول: قرار می‌دهیم

$g(x) = \int_e^{e^x} f(t\ln t)dt$ و $h(x) = \int_۰^{\ln x} e^{(t+e^t)} f(e^{(t+e^t)})dt$. (۳ نمره)

با استفاده از قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\int_e^{e^x} f(t\ln t)dt) = e^x f(xe^x)$$

(۶ نمره)

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx}(\int_۰^{\ln x} e^{(t+e^t)} f(e^{(t+e^t)})dt) = \frac{۱}{x} e^{\ln x} e^x f(e^{(\ln x + e^{\ln x})}) = e^x f(xe^x)$$

(۶ نمره)

بنابراین طبق نتیجه‌ی قضیه‌ی مشتق تابع ثابت، عدد ثابت K موجود است که برای هر $x > ۰$

$$h(x) = g(x) + K$$

از طرفی $e^۱ = e$ و $\ln ۱ = ۰$، بنابراین $g(۱) = h(۱) = ۰$، در نتیجه $K = ۰$ و تساوی برای هر $x > ۰$ ثابت می‌شود. (۵ نمره)

راه حل دوم: قرار میدهیم $\ln t = e^u$. در نتیجه $t = e^{e^u}$ و $dt = e^u e^{e^u} du$. (۵ نمره)

همچنین برای $t = e$ داریم $u = ۰$ برای $t = e^a$ داریم $u = \ln a$. در نتیجه (۵ نمره)

(۵ نمره)

$$\int_e^{e^a} f(t\ln t)dt = \int_۰^{\ln a} e^u e^{e^u} f(e^u e^{e^u})du = \int_۰^{\ln a} e^{(u+e^u)} f(e^{(u+e^u)})du$$

(۵ نمره)

۵. همگرایی یا واگرایی انتگرال زیر را تعیین کنید.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x}dx$$

پاسخ: می‌توان نوشت

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x}dx = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x}dx$$

(۲ نمره)

الف) چون $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x} = +\infty$ بنابراین $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x}dx$ یک انتگرال ناسره نوع دوم است. (۲ نمره)

اگر قرار دهیم $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$، از آنجا که برای $0 < x < 1$، $\sin^{2} x < x^{2}$، بنابراین $x^{2}-\sin^{2} x > 0$. در نتیجه برای $0 < x < 1$، $f(x) < g(x)$. (۵ نمره)

از طرفی $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to 0} 2(1-\sqrt{c}) = 2$ همگرا است، در نتیجه بنابه آزمون مقایسه $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x}dx$ همگرا خواهد بود. (۶ نمره)

ب) به دلیل بازه‌ی نامتناهی انتگرال‌گیری، $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x}dx$ یک انتگرال ناسره‌ی نوع اول است. (۲ نمره)

اگر قرار دهیم $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x}$ و $h(x) = \frac{1}{x^{2}}$، داریم $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2}}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x} = 1$ (۵ نمره)

از طرفی $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2}}dx = \lim_{c\to+\infty} -(\frac{1}{c}-1) = 1$ همگرا است، در نتیجه بنابه آزمون مقایسه‌حدی $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+x^{2}-\sin^{2} x}dx$ همگرا خواهد بود. (۶ نمره)

از الف و ب نتیجه می‌شود که انتگرال ناسره‌ی داده شده همگرا است. (۲ نمره)