

## سئولات چهار جوابی دنباله‌ها

۱. فرض کنید  $\{a_n\}$  دنباله‌ای صعودی و بی‌کران از اعداد مثبت است. کدامیک از گزاره‌های زیر در مورد دنباله‌ی  $b_n := \frac{a_n}{a_n + \sqrt{a_n}}$  درست است؟
- (الف)  $\{b_n\}$  دنباله‌ای کراندار و واگرا است. به صفر است.  
 (ب)  $\{b_n\}$  دنباله‌ای همگرا به صفر است.  
 (ج)  $\{b_n\}$  دنباله‌ای همگرا به ۱ است.  
 (د)  $\{b_n\}$  دنباله‌ای واگرا به  $\infty$  است.
۲. فرض کنید  $a > 0$  عددی ثابت است. برای دنباله‌ی  $a_n := \frac{2 + a^n}{1 + a^n}$  کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟
- (الف) این دنباله فقط برای  $0 < a < 1$  همگرا است.  
 (ب) این دنباله برای فقط برای  $a > 1$  همگرا است.  
 (ج) این دنباله به ازای جميع مقادیر  $a$  همگرا است.  
 (د) این دنباله به ازای جميع مقادیر  $a$  واگرا است.
۳. فرض کنید  $a > 0$  ثابت است. کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد دنباله‌ی  $a_n := (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$  درست است؟
- (الف) این دنباله فقط برای  $0 < a < 1$  همگرا است و حد آن برابر ۱ است.  
 (ب) این دنباله فقط برای  $a > 1$  همگرا است و حد آن نیز برابر  $a$  است.  
 (ج) این دنباله به ازای جميع مقادیر  $a$  واگرا است.  
 (د) این دنباله به ازای همه‌ی مقادیر  $a$  همگرا است و حد آن برابر  $\max\{1, \sqrt{a}\}$  است.
۴. فرض کنید  $\{a_n\}$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی است با این خاصیت که دنباله‌ی  $\{a_n^2\}$  همگرا باشد. کدامیک از گزینه‌های زیر در حالت کلی درست است؟
- (الف) دنباله‌ی  $\{\frac{na_n}{n + a_n}\}$  همگرا است.  
 (ب) دنباله‌ی  $\{\frac{1 + a_n}{n}\}$  همگرا است.  
 (ج) دنباله‌ی  $\{\frac{1}{1 + na_n}\}$  همگرا است.  
 (د) دنباله‌ی  $\{\frac{a_n}{1 + a_n^2}\}$  همگرا است.

۵. فرض کنید  $a \in \mathbb{R}$  مقداری ثابت باشد. در مورد دنباله  $a_n = \frac{a^n}{n!}$  کدامیک از

گزینه‌های زیر درست است؟

الف) این دنباله فقط برای مقادیر  $a > 1$  همگرا است.

ب) این دنباله فقط برای مقادیر  $-1 < a < 1$  همگرا است.

ج) این دنباله برای جميع مقادیر  $a$  همگرا است.

د) این دنباله برای جميع مقادیر  $a$  واگرا است.

۶. فرض کنید  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  دو دنباله باشند. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف) اگر دنباله‌های  $\{a_n + b_n\}$  و  $\{a_n - b_n\}$  هر دو همگرا باشند، آنگاه دنباله‌های  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  هر دو همگرا هستند.

ب) اگر دنباله  $\{a_n\}$  همگرا و دنباله  $\{b_n\}$  کراندار باشد، آنگاه دنباله  $\{a_n b_n\}$  کراندار است.

ج) اگر دنباله  $\{a_n\}$  واگرا به بی‌نهایت و دنباله  $\{b_n\}$  کراندار باشد، آنگاه دنباله  $\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}}$  همگراست.

د) اگر دنباله  $\{a_n\}$  همگرا به صفر و دنباله  $\{b_n\}$  کراندار باشد، آنگاه دنباله  $\left\{\frac{b_n}{|a_n|}\right\}$  واگرا به مثبت بینهایت است.

۷. اگر  $\lim a_n = \infty$  و  $\lim b_n = 0$  و  $b_n$  نامنفی باشد، در مورد همگرایی  $\left\{\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right\}$  کدام گزینه درست است.

الف) همگرا به صفر است. ب) نمیتوان اظهار نظر کرد. ج) همگرا به یک است. د) واگرا به بی‌نهایت است.

۸. برای دنباله بازگشتی  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n^2 + a_n}$  و  $a_1 = 1$ ، کدام گزینه درست است.  
الف)  $\lim a_n = -1$  ب)  $\lim a_n = 0$  ج)  $\lim a_n = \infty$  د)  $\lim a_n = -\infty$

۹. برای دنباله با ضابطه

$$a_n = \begin{cases} \frac{[n]}{n} & n \text{ زوج} \\ \frac{1 - n^2}{1 + n - n^2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

کدام گزینه درست است.

الف) همگرا به صفر است. ب) کراندار ولی واگرا است. ج) همگرا به یک است. د) واگرا به بی نهایت است.

۱۰. هرگاه  $\lim a_n = a$  و  $a > 0$ . کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

الف)  $\lim a_n^{\frac{1}{n}} = 0$ . ب)  $\lim a_n^{\frac{1}{n}} = 1$  ج)  $\lim (a_n^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}) = 0$  د)  $\lim (a_n - a)^{\frac{1}{n}} = 0$

۱۱. هرگاه  $a_n = \frac{n^r}{c^n}$  و  $c > 1$ . کدامیک از گزینه های زیر درست است.

الف)  $\lim a_n = -1$  ب)  $\lim a_n = 0$  ج)  $\lim a_n = \frac{1}{c}$  د) واگراست.

۱۲. در مورد همگرایی و واگرایی هر کدام از دنباله های زیر چه میتوان گفت؟

الف)  $a_n$  و  $b_n$  همگرا هستند. ب)  $a_n$  واگرا و  $b_n$  همگرا هستند. ج)  $a_n$  همگرا و  $b_n$  واگرا هستند. د)  $a_n$  واگرا و  $b_n$  همگرا هستند.

۱۳. اگر  $a > 1$  و  $l = \lim \frac{a^n + 2}{a^{n+1} + 3}$ ، آنگاه

الف)  $l = a$  ب)  $l = 2a$  ج)  $l = \frac{1}{a}$  د)  $l$  وجود ندارد.

۱۴. برای  $0 \leq x \leq 1$ ،  $\lim (1 + e^{-5n})x$  برابر کدام یک از موارد زیر است؟

الف) صفر. ب)  $x$  ج) یک د)  $\infty$

۱۵. اگر دنباله  $\{a_n\}$  همگرا و دنباله  $\{b_n\}$  کراندار باشد، آنگاه کدام یک از گزینه های

زیر در مورد دنباله  $c_n = \frac{a_n b_n - 5n}{a_n^2 - 15n}$  صحیح است؟

الف)  $\lim c_n = -1$  ب)  $\lim c_n = \frac{1}{3}$  ج)  $\lim c_n = \infty$  د)  $\lim c_n = -5$

۱۶. اگر  $\lim a_n = \infty$  و  $\lim b_n = -\infty$ ، کدام گزینه درست است.  
 الف)  $\lim \frac{a_n}{b_n} = -1$  (ب)  $\lim (a_n + b_n) = 0$  (ج)  $\lim \sqrt{a_n} = 1$  (د)  $\lim a_n b_n = -\infty$

۱۷. آنگاه کدام گزینه درست است.  $a_n = (1 - \frac{9}{n^2})^n \cos \frac{1}{n}$ .  
 الف)  $\lim a_n = 0$  (ب)  $\lim a_n = 1$  (ج)  $\lim c_n = \infty$  (د)  $\lim c_n = e^{-9}$

۱۸. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟  
 الف) اگر  $\{b_n\}$  دنباله ای مثبت و کراندار و دنباله  $\{a_n\}$  واگرا به بینهایت باشد، آنگاه دنباله  $\lim a_n b_n = \infty$ .  
 ب) اگر دو دنباله  $\{a_n b_n\}$  و  $\{a_n + b_n\}$  همگرا باشد، آنگاه دنباله  $\{a_n^2 + b_n^2\}$  همگرا است.  
 ج) دنباله  $\{a_n\}$  همگراست اگر و فقط اگر دنباله  $\{|a_n|\}$  همگرا باشد.  
 د) الف و ب صحیح هستند.

۱۹. در مورد دنباله بازگشتی  $a_1 = \frac{3}{4}$ ،  $a_{2n} = \sqrt[2n]{2^{2n+1}}$  و  $a_{2n+1} = 3 - \frac{2}{a_{2n-1}}$ ، کدام گزینه صحیح است.

الف) فقط زیر دنباله زوج همگرا است.  
 ب) زیر دنباله فرد نزولی است.  
 ج) زیر دنباله زوج و فرد همگراست.  
 د) دنباله همگراست.

۲۰. اگر  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{2n}{n^2+k}$ ، آنگاه  
 الف)  $\lim s_n = 1$  (ب)  $\lim s_n = 0$  (ج)  $\lim s_n = \infty$  (د)  $\lim s_n = 2$

### سئوالات چهار جوابی سری ها

۲۱. فرض کنید  $\{a_n\}$  دنباله ای از اعداد مثبت است به قسمی که سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا

باشد. اگر برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1+a_k}$ ، آنگاه

- الف) دنباله‌ی  $\{s_n\}$  واگرا به  $\infty$  است. (ب) دنباله‌ی  $\{s_n\}$  همگرا به صفر است.
- ج) دنباله‌ی  $\{s_n\}$  همگرا به عددی مثبت است. (د) دنباله‌ی  $\{s_n\}$  بی‌کران است.

۲۲. فرض کنید  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی مثبت هستند. سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n + b^n}}$  همگرا است

اگر و تنها اگر

الف)  $0 < a < 1$  و  $0 < b < 1$ .

ب)  $a = b = 1$ .

ج) این سری به ازای همه مقادیر  $a$  و  $b$  واگرا است.

د) این سری به ازای کلیه مقادیر  $a$  و  $b$  همگرا است.

۲۳. فرض کنید  $a > 0$  عددی ثابت است. کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + a^n}$$

درست است؟

الف) این سری به ازای تمام مقادیر  $a$  همگرا است. (ب) این سری به ازای

تمام مقادیر  $a$  واگرا است.

ج) این سری فقط به ازای  $0 < a \leq 1$  همگرا است. (د) این سری فقط به ازای

$0 < a \leq 1$  واگرا است.

۲۴. فرض کنید  $\{a_n\}$  دنباله‌ای از اعداد مثبت و سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد. کدامیک

از سری‌های زیر همگرا است؟

(ب)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

الف)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + 1}{a_n + 2}$

(د)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{a_n^2 + 1}}$

ج)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + n}$

۲۵.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{n}{n^2 + 2k}$  برابر است با

الف) ۱ ب) صفر ج)  $\frac{1}{3}$  د) ۲

۲۶. دو سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}+1}}$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\frac{1}{n} + n)^n}$  به ترتیب

الف) همگرا، همگرا ب) همگرا، واگرا ج) واگرا، واگرا د) واگرا، همگرا

۲۷. در خصوص سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$  کدام گزینه صحیح است؟

الف) واگرا ب) همگرا ج) همگرای مطلق د) همگرای مشروط

۲۸. سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n+1}$  بر کدام بازه همگراست؟

الف)  $(0, 1]$  ب)  $(0, 2)$  ج)  $(1, 2]$  د)  $(1, 3]$

۲۹. اگر به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $\frac{1}{4} < a_n < 1$ ، در این صورت سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(1 + \sqrt{na_n})}$

الف) واگرا است ب) همگرایی آن بستگی به مقدار  $a_n$  دارد. ج) همگرای مطلق است. د) همگرای مشروط است.

۳۰. به ازای کدام مقادیر  $x$ ، سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}$  همگراست.

الف)  $\{x : x > 1\}$  ب)  $\{x : |x| < 1\}$  ج)  $\{x : x < 0\}$  د)  $\{x : x < -1\}$

۳۱. اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = A$ ، آنگاه مقدار  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$  کدام است؟

الف)  $\frac{1}{4}A$  ب)  $\frac{3}{4}A$  ج)  $\frac{5}{4}A$  د)  $\frac{7}{4}A$

۳۲. به ازای کدام مقادیر  $p$ ،  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^p+1} - \sqrt{n^p})$  همگراست؟  
 الف)  $p > 1$  (ب)  $p > 2$  (ج)  $1 < p < 2$  (د)  $p < 2$

۳۳. سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$  بر کدام بازه همگراست؟  
 الف)  $|x| < 2$  (ب)  $|x| < 4$  (ج)  $(-\infty, \infty)$  (د)  $3 < x < \infty$

۳۴. د رمورد سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$  کدام یک از موارد زیر درست است؟

الف) طبق آزمون مقایسه با سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  همگراست.  
 ب) طبق آزمون ریشه به مقدار  $\frac{1}{3}$  همگراست.  
 ج) طبق آزمون نسبت به مقدار  $\frac{1}{3}$  همگراست.  
 د) طبق آزمون مقایسه حدی با سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  همگراست.

۳۵. در مورد سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n(n-1)}$  کدام یک از موارد زیر درست است؟

الف) طبق آزمون مقایسه با سری  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{2}{3}}$  همگراست.  
 ب) طبق آزمون ریشه با مقدار  $\frac{2}{3}$  همگراست.  
 ج) طبق آزمون نسبت به مقدار  $\frac{2}{3}$  همگراست.  
 د) طبق آزمون مقایسه حدی با سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$  همگراست.

۳۶. کدام یک از سری های زیر واگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} \text{ (الف)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}} \text{ (ب)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \text{ (ج)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5n}\right)^3 \text{ (د)}$$

۳۷. فرض کنید  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-5)^n}{3^n(n+1)}$ ، آنگاه

- (الف) سری به ازای  $1 < x < 4$  همگرای مطلق است.  
 (ب) سری به ازای  $x > 1$  همگرای مشروط و به ازای  $x = -1$  و  $x < 4$  همگرای مطلق است.  
 (ج) سری به ازای  $1 < x < 4$  همگرای مشروط و به ازای  $x = 1$  همگرای مطلق است.  
 سری به ازای  $-4 < x < -1$  همگرای مطلق و به ازای  $x = -1$  همگرای مشروط است.

۳۸. در مورد سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n + (1 + \frac{1}{n})^n}$  کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (الف) سری به ازای  $|x| < 1$  همگرای مطلق است.  
 (ب) سری به ازای هر  $x$  همگرای مشروط است.  
 سری به ازای هر  $x$  واگراست.  
 سری به ازای  $|x| < 1$  همگرای مشروط و به ازای  $x = 1$  واگراست.

۳۹. حاصل ضرب کوشی دو سری  $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  کدام است؟



$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n \quad (\text{د}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \quad (\text{ج}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (\text{الف})$$

۴۰. اگر سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا و به ازای هر  $n$ ،  $0 < a_n \leq b_n$  در مورد سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$  کدام گزینه درست است؟

الف) همگرا است (ب) واگرا است. (ج) واگرا به بی نهایت است. (د) نمیتوان اظهار نظر کرد.

۴۱. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

الف)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n}$  همگراست.

ب)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  به ازای هر  $x$ ،  $|x| > 1$  واگراست.

ج)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$  همگراست.

د)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2^n - 1)^2}{n^3}$  همگراست.

۴۲. هرگاه سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا و سری  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  واگرا باشد. کدام یک از گزینه های

زیر در مورد سری  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  کدام گزینه درست است؟

الف) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = 0$ ، آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  واگرا است. (ب) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$ ، آنگاه

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  همگرا است.

ج) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 2$  آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  واگرا است. د) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = 1$  آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  همگرا است.