

معادلات دیفرانسیل

تألیف

دکتر بهناز عمومی

استاد دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

فهرست مطالب

پنج	مقدمه
۱	فصل ۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
۱	۱,۱ معادلات مرتبه اول خطی
۷	۲,۱ حل معادلات برنولی
۱۰	۳,۱ معادلات جدا شدنی
۱۳	۴,۱ معادلات کامل
۲۰	۵,۱ عامل انتگرال ساز
۲۷	۶,۱ معادلات همگن
۳۱	۷,۱ تغییر متغیر
۳۳	۸,۱ تغییر نقش متغیر مستقل و وابسته
۳۷	فصل ۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم
۳۷	۱,۲ آشنایی با اعداد مختلط
۳۸	۲,۲ خواص جمع و ضرب عدد مختلط
۴۲	۳,۲ مختصات قطبی
۴۳	۴,۲ تابع نمایی مختلط
۴۶	۵,۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم
۴۷	۶,۲ حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی
۴۷	۷,۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن

۵۳	روش کاهش مرتبه	۸,۲
۵۷	معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت	۹,۲
۶۳	معادلات اویلر	۱۰,۲
۶۶	تغییر متغیر	۱۱,۲
۶۸	حل معادلات مرتبه دوم خطی غیر همگن	۱۲,۲
۷۰	روش تغییر پارامتر	۱۳,۲
۷۲	روش ضرایب نامعین	۱۴,۲

فصل ۳ تبدیل لاپلاس ۷۹

۸۲	تبدیل لاپلاس	۱,۳
۸۴	خواص تبدیل لاپلاس	۲,۳
۸۶	تبدیل معکوس لاپلاس	۳,۳
۹۸	تبدیل لاپلاس توابع ناپیوسته	۴,۳
۱۰۵	تبدیل لاپلاس توابع متناوب	۵,۳
۱۰۷	حاصل ضرب کانولوسین (پیچشی)	۶,۳
۱۱۳	تابع دلتای دیراک (تابع ضربه‌ای)	۷,۳
۱۱۵	تمرین‌های مروری	۸,۳
۱۱۶	خلاصه لاپلاس توابع مورد نیاز و خواص لاپلاس	۹,۳

فصل ۴ حل معادلات دیفرانسیل به روش سری‌های توانی ۱۱۷

۱۲۰	حل معادلات با استفاده از سری توانی حول نقطه عادی	۱,۴
۱۲۶	روش حل معادله حول نقطه غیرعادی منظم	۲,۴

فصل ۵ دستگاه معادلات ۱۳۵

۱۳۵	مقدمه دستگاه معادلات	۱,۵
۱۳۶	جمع و ضرب ماتریس‌ها	۲,۵
۱۳۸	دستگاه معادلات خطی	۳,۵
۱۴۱	استقلال خطی و وابستگی خطی	۴,۵
۱۴۳	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	۵,۵

۱۴۹.....	دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی	۶,۵
۱۵۰.....	حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با استفاده از مقادیر ویژه	۷,۵
۱۶۰.....	مقادیر ویژه تکراری	۸,۵
۱۶۶.....	دستگاه معادله غیر همگن	۹,۵
۱۶۷.....	روش تغییر پارامتر:	۱۰,۵
۱۷۵.....	یک روش محاسبه برای تابع e^{At}	۱۱,۵

فصل ۶ پاسخ تمرین‌ها ۱۷۷

۱۷۷.....	حل تمرین‌های فصل اول	۱,۶
۱۷۷.....	پاسخ تمرین ۱,۱,۶؟؟	۱,۱,۶
۱۷۹.....	پاسخ تمرین ۲,۱,۶؟؟	۲,۱,۶
۱۷۹.....	پاسخ تمرین ۳,۱,۶؟؟	۳,۱,۶
۱۸۱.....	پاسخ تمرین ۴۶,۱	۴,۱,۶
۱۸۲.....	پاسخ تمرین ۵۰,۱	۵,۱,۶
۱۸۳.....	پاسخ تمرین ۵۳,۱	۶,۱,۶
۱۸۴.....	پاسخ تمرین ۵۷,۱	۷,۱,۶
۱۸۵.....	حل تمرین‌های مروری داده شده از فصل اول	۸,۱,۶
۱۸۹.....	پاسخ تمرین‌های فصل دوم	۲,۶
۱۸۹.....	پاسخ تمرین ۶۷,۲	۱,۲,۶
۱۹۲.....	پاسخ تمرین ۷۴,۲	۲,۲,۶
۱۹۶.....	حل تمرین‌های فصل سوم	۳,۶
۱۹۶.....	پاسخ تمرین ۴۵,۳	۱,۳,۶
۱۹۶.....	پاسخ تمرین ۶۴,۳	۲,۳,۶
۱۹۷.....	پاسخ تمرین ۳۰,۳	۳,۳,۶
۱۹۹.....	پاسخ تمرین ۴۳,۳؟؟	۴,۳,۶
۱۹۹.....	پاسخ تمرین ۵۳,۳؟؟	۵,۳,۶
۲۰۰.....	پاسخ تمرین ۸,۳	۶,۳,۶
۲۰۱.....	پاسخ تمرین ۸,۳	۷,۳,۶
۲۰۲.....	پاسخ تمرین ۴۵,۳	۸,۳,۶

۲۰۴.....	پاسخ تمرین ۲۰,۳	۹,۳,۶
۲۰۴.....	پاسخ تمرین ۶۴,۳	۱۰,۳,۶
۲۰۵.....	پاسخ تمرین ؟؟	۱۱,۳,۶
۲۰۵.....	پاسخ تمرین ۴۷,۳	۱۲,۳,۶
۲۰۶.....	پاسخ تمرین ۸۸,۳	۱۳,۳,۶

۲۰۷

مراجع

مقدمه

ریاضیات در حالت کلی هنر مدل کردن پدیده‌های طبیعی و سپس تجزیه و تحلیل آنهاست. بسیاری از اصول و قوانین حاکم بر طبیعت با استفاده از توابع مدل می‌شوند. در غالب پدیده‌ها یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته وجود دارد.

به عنوان مثال زمان یک متغیر مستقل و میزان افزایش یا کاهش جمعیت، میزان جریان در مدار الکتریکی، حرکت سیالات و میزان حرارت متغیرهای وابسته به زمان هستند. این ارتباط بین متغیر وابسته و متغیر مستقل را با تابع مدل می‌کنیم. (متغیر مستقل t ، متغیر وابسته $y = f(t)$).

در اکثر مسائل هدف بررسی و یافتن میزان تغییرات متغیر وابسته نسبت به تغییرات متغیر مستقل است، که به این پارامتر نرخ تغییرات نیز گفته می‌شود. در ریاضی نرخ تغییرات، همان مشتق تابع است.

$$\begin{array}{l} \text{متغیرهای مستقل} \quad t_2, t_1 \\ \text{متغیرهای وابسته نظیر} \quad f(t_2), f(t_1) \\ \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = f' \end{array}$$

روابطی که بین یک متغیر مستقل، متغیر وابسته به آن و نرخ تغییرات آن وجود دارد، یک معادله است که به دلیل ظاهر شدن دیفرانسیل تابع (مشتق) معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود و موضوع مورد مطالعه این درس است.

تعریف ۱. هر معادله شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن باشد را معادله دیفرانسیل می‌گوییم. ▲

مثال ۲. فرض کنید شی‌ای در جو نزدیک سطح دریا در حال سقوط است. متغیر مستقل زمان را با t و متغیر وابسته یعنی سرعت شی را با v نمایش می‌دهیم. طبق قانون دوم نیوتن می‌دانیم که

نیروی خالص وارد بر شی = شتاب \times جرم شی

$$F = a \times m$$

همچنین می‌دانیم که

$$a = \frac{dv}{dt}$$

پس داریم

$$f = m \frac{dv}{dt}$$

از طرف دیگر نیروی F به نیروی گرانش زمین و نیروی مقاومت شی بستگی دارد. هر چه قدر نیروی مقاومت بیشتر نیروی گرانش کمتر در نتیجه

$$F = mg - \gamma v$$

که g شتاب گرانشی و عدد ثابت $9/8 \frac{m}{s^2}$ است، γ ضریب مقاومت شی است و به جنس شی بستگی دارد و ثابت است در نتیجه

$$mg - \gamma v = m \frac{dv}{dt}$$

و v تابع مجهول است. رابطه بالا یک معادله دیفرانسیل است. \blacktriangle
در حالت کلی برای مدل کردن یک پدیده طبیعی:

۱. متغیر مستقل و متغیر وابسته را مشخص می‌کنیم و به هر یک نمادی نسبت می‌دهیم. (تعیین واحدهای متغیرها مهم است. مثلا t ثانیه یا، $^\circ$ است)
۲. قانون حاکم بر پدیده را بررسی می‌کنیم. این قانون از علم مربوط به مساله می‌آید. مثلا فیزیک، بیولوژی، الکترونیک و ...
۳. قانون را با در نظر گرفتن ثابت‌ها و متغیرهای کمکی به زبان متغیرهای مستقل و وابسته بیان می‌کنیم. (توجه به یکسان کردن واحد متغیرها مهم است)
۴. حاصل یک معادله دیفرانسیل است و ممکن است پیچیده باشد.

مثال ۳، $^\circ$

(الف) فرض کنید گروهی موش در صحرا زندگی می‌کنند و شکارچی در کار نیست. جمعیت موش‌ها با نرخ متناسب با جمعیت فعلی افزایش می‌یابد. متغییر مستقل = زمان = t و متغییر وابسته = جمعیت موش‌ها = $p(t)$.

$$\text{قانون رشد} \quad \frac{dp}{dt} = rp(t) \quad (\text{معادله دیفرانسیل})$$

r ثابت نرخ

(ب) چند جغد در همان نزدیکی هستند و روزانه ۱۵ موش را می‌کشند.

$$\text{معادله دیفرانسیل} \quad \frac{dp}{dt} = rp(t) - 45$$

(۴۵) تعداد موش‌های کشته شده در یک ماه، زیرا واحد t ماه است).

▲

مثال ۴,۰. قانون خنک سازی نیوتن: میزان تغییر درجه حرارت یک جسم با تفاضل درجه حرارت و محیط اطراف متناسب است.

t متغییر مستقل = زمان و حرارت جسم متغییر وابسته = y

معادله دیفرانسیل $y' = -K(y - f(t))$ که $f(t)$ میزان حرارت محیط است و K ثابت است.

▲

هدف این درس: حل معادله دیفرانسیل داده شده است که یک مهندس به روش‌های حل معادله دیفرانسیل نیاز دارد. علاوه بر این، این درس جایی است که می‌توان اهمیت و نقش ریاضی در سایر علوم مانند فیزیک و مهندسی را مشاهده کرد.

حل معادله یعنی یافتن توابعی که در معادله صدق می‌کنند و به آنها جواب معادله می‌گوییم. اولین قدم در حل معادله دیفرانسیل دسته بندی آنها است.

معادلات دیفرانسیل را در اولین مرحله به دو دسته عادی (معمولی) و جزئی تقسیم می‌کنیم.

تعریف ۵,۰. اگر مشتق تابع مجهول نسبت به یک متغییر در معادله ظاهر شده باشد، معادله را معادله دیفرانسیل عادی و در غیر این صورت یعنی اگر مشتقات جزئی در معادله ظاهر شده باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامیم.

▲

در این درس تنها به حل معادله دیفرانسیل عادی می‌پردازیم.

تعریف ۶,۰. به بالاترین مرتبه مشتق موجود در یک معادله، مرتبه معادله می‌گوییم

▲

مثال ۷، ۰.

۱. (خطی) معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول $mg - \gamma v = m \frac{dv}{dt}$

۲. (خطی) معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول $\frac{dp}{dt} = rp - k$

۳. (خطی) معادله دیفرانسیل عادی مرتبه سوم $f''' + f' = x \sin x$

۴. (غیر خطی) معادله دیفرانسیل عادی مرتبه دوم $y'' + e^y = e^x$

۵. (غیر خطی) معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول $yy' = xe^x$

۶. معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$



فرم کلی معادله دیفرانسیل عادی مرتبه n ام

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

در مرحله دوم، معادلات دیفرانسیل را به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم می‌کنیم. تعریف ۸، ۰. اگر F یک رابطه خطی بر حسب $y, y', \dots, y^{(n)}$ باشد یعنی به صورت

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x)$$

باشد (توان y و مشتقات آن یک است و ضرایب فقط بر حسب x است) معادله خطی، در غیر این صورت آن را غیر خطی می‌نامیم.



مثال ۹، ۰.

۱. (خطی) مرتبه دوم $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

۲. (غیر خطی) مرتبه سوم $y''' + 2e^x y'' + yy' = x^4$

۳. (غیر خطی) مرتبه دوم $(1 + y^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dx}{dy} + y = e^x$

۴. (غیر خطی) مرتبه دوم $\frac{d^2 y}{dx^2} + \sin(x + y) = \sin x$

۵. (خطی) مرتبه سوم $\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\cos^2 x)y = x^3$



معرفی فصل‌های درس

فصل اول. روش‌های حل معادلات دیفرانسیل (عادی) مرتبه اول

فصل دوم. روش‌های حل معادلات دیفرانسیل (عادی) مرتبه دوم

فصل سوم. روش حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس

فصل چهارم. حل معادلات دیفرانسیل به شکل سری‌های توانی

فصل پنجم. حل دستگاه معادلات دیفرانسیل

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱,۱ معادلات مرتبه اول خطی

شکل کلی یک معادله مرتبه اول خطی به صورت زیر است.

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = g(x)$$

یا

$$y' + p(x)y = g(x)$$

ساده‌ترین نوع معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی وقتی است که $p(x) = 0$ یعنی

$$y' = g(x)$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

و به راحتی با یک انتگرال گیری، جواب معادله به دست می‌آید.

$$y = \int g(x)dx + c$$

که c مقدار ثابت است.

جواب معادله که دارای پارامتر ثابت c است را جواب عمومی معادله می‌گوییم. اگر به دنبال جوابی از معادله باشیم که از یک نقطه مشخص می‌گذرد، شرط را به شکل $y(x_0) = y_0$ نمایش می‌دهیم و آن را یک شرط اولیه می‌گوییم. جوابی که در این شرط اولیه صدق کند را جواب خصوصی معادله می‌گوییم.

مثال ۱,۱.

$$\begin{aligned} y' &= \sin 2x, y(0) = \frac{1}{4} \\ y &= \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c \\ y(0) &= -\frac{1}{2} \cos 2(0) + c = -\frac{1}{2} + c = \frac{1}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{4} \\ y(x) &= -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

▲

مثال ۲,۱.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\ y &= \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx = \int \frac{e^x - 1 + 2}{e^x - 1} dx \\ y &= \int \left(1 + \frac{2}{e^x - 1}\right) dx = x + 2 \int \frac{dx}{e^x - 1} \\ y &= x + 2 \int \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\ 1 - e^{-x} &= u \\ e^{-x} dx &= du \\ y &= x + 2 \int \frac{du}{u} = x + 2 \ln |u| + c \\ y &= x + 2 \ln |1 - e^{-x}| + c \end{aligned}$$

▲

معادلات مرتبه بالاتر به فرم $y^{(n)} = g(x)$ را نیز می‌توان با n بار انتگرال گیری حل نمود.

تمرین ۳,۱. معادله $y'' = xe^{-x}$ را حل کنید.

اکنون به معادله مرتبه اول خطی در حالت کلی می‌پردازیم.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

که $p(x)$ و $g(x)$ توابعی معلوم و پیوسته هستند. با توجه به ایده قبلی اگر بتوانیم این معادله را نیز به فرم مشتق یک تابع مساوی یک تابع بنویسیم یعنی به صورت

$$\frac{d\Box}{dx} = g(x)$$

آنگاه می‌توانیم مانند قبل با یک انتگرال‌گیری معادله را حل کنیم. مثال ۱، ۴. معادله مرتبه اول خطی $y' + \frac{1}{x}y = 1$ را در نظر بگیرید. اگر طرفین معادله را در x ضرب کنیم، داریم:

$$xy' + y = x$$

یا

$$x \frac{dy}{dx} + y = x$$

یا

$$\frac{xdy + ydx}{dx} = x$$

یا

$$\frac{d(xy)}{dx} = x$$

که همان فرم مطلوب است و با انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$xy = \int x dx \Rightarrow xy = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{c}{x}$$

جواب عمومی معادله



حال معادله $\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$ را در حالت کلی در نظر می‌گیریم و مانند مثال قبل سعی می‌کنیم با ضرب کردن طرفین معادله در تابعی مانند $\mu(x)$ طرف چپ معادله را

به مشتق تابع $\mu(x)y$ تبدیل کنیم.
 به چنین تابع $\mu(x)$ که به دنبال آن هستیم عامل انتگرال ساز معادله می‌گوییم.
 پس هدف یافتن تابع $\mu(x)$ است.
 قدم اول معادله $\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$ را در نظر می‌گیریم.
 قدم دوم طرفین معادله را در $\mu(x)$ ضرب می‌کنیم.

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x) \quad (1, 1)$$

قدم سوم تابع $\mu(x)$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که طرف اول معادله ۱,۱ برابر $\frac{d(\mu(x)y)}{dx}$ شود.
 طبق قانون مشتق حاصل ضرب داریم:

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \frac{d\mu}{dx}y + \mu \frac{dy}{dx}$$

پس قرار می‌دهیم:

$$\frac{d\mu}{dx}y + \mu \frac{dy}{dx} = \mu \frac{dy}{dx} + \mu p(x)y, \quad y \neq 0$$

پس از ساده سازی داریم

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = p(x)dx$$

با انتگرال گیری از طرفین

$$\begin{aligned} \mu > 0 \text{ کنید} &\Rightarrow \ln \mu(x) = \int p(x)dx + c_1 \\ \text{تابع } e &\Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx + c_1} = e^{\int p(x)dx} e^{c_1} \\ e^{c_1} = c &\Rightarrow \mu(x) = ce^{\int p(x)dx} \end{aligned}$$

چون نیاز به یک تابع $\mu(x)$ داریم، ضریب c را می‌توانیم مساوی یک قرار دهیم.

نتیجه ۵,۱. عامل انتگرال ساز برای معادله مرتبه اول خطی

$$y' + p(x)y = g(x)$$

به صورت $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ است.

نکته مهم. در فرمول $\mu(x)$ ، تابع $p(x)$ ضریب y است، وقتی که ضریب y' برابر یک باشد. پس قبل از استفاده از فرمول ضریب y' را یک می‌کنیم. با توجه به فرمول $\mu(x)$ ، معادله داده شده به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$\frac{(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)g(x)$$

و با انتگرال گیری داریم

$$\begin{aligned} \mu(x)y &= \int \mu(x)g(x)dx + c \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{1}{\mu(x)}[\int \mu(x)g(x)dx + c] \end{aligned}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

مثال ۱، ۶. جواب عمومی معادله $y' - 2xy = x$ را بیابید.
حل: توجه: ضریب y' ، یک است و $p(x) = -2x$ یافتن عامل انتگرال ساز

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$$

طرفین معادله را در e^{-x^2} ضرب می‌کنیم.

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2}$$

طبق روش یافتن μ ، طرف اول معادله برابر $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y)$ است.

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y) = xe^{-x^2}$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم.

$$e^{-x^2}y = \int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

جواب عمومی معادله $y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$.



مثال ۷,۱. جواب عمومی معادله $x^3 y' + 3xy = \frac{\sin x}{x}$ را بیابید.
حل: ابتدا باید ضریب y' را برابر یک کنیم.

$$\begin{aligned} y' + \frac{3}{x}y &= \frac{\sin x}{x^3} \\ \mu(x) &= e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3 \\ x^3 y' + 3x^2 y &= \frac{d(x^3 y)}{dx} = \sin x \\ \Rightarrow x^3 y &= \int \sin x dx = \cos x + c \\ \Rightarrow y &= \frac{\cos x}{x^3} + \frac{c}{x^3} \text{ جواب عمومی معادله} \end{aligned}$$



مثال ۸,۱. جواب خصوصی معادله $x(\ln x)y' = x \ln x - y$, $y(e) = 1$ را بیابید.
حل: ضریب y' را یک می‌کنیم و معادله را به فرم استاندارد می‌نویسیم.

$$y' + \frac{1}{x \ln x} y = 1 \quad (2, 1)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{x \ln x} \\ \mu(x) &= e^{\int \frac{dx}{x \ln x}} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x \end{aligned}$$

طرفین معادله ۲,۱ را در $\mu(x)$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (\ln x)y' + \frac{1}{x}y &= \ln x \\ (\ln x)y' + \frac{1}{x}y &= \frac{d[(\ln x)y]}{dx} = \ln x \\ (\ln x)y &= \int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + c \\ \ln x = u &\Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv &\Rightarrow x = v \\ \Rightarrow y &= x - \frac{x}{\ln x} + \frac{c}{\ln x} \text{ جواب عمومی معادله} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(e) &= e - e + c = 1 \Rightarrow c = 1 \\ \Rightarrow y &= x - \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x} \text{ جواب خصوصی معادله} \end{aligned}$$



معادلات دیفرانسیل مرتبه اول _____ ۷

تمرین ۱، ۹. جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$(الف) \quad x \frac{dy}{dx} + (2y - xy + 1) = 0 \quad x > 0$$

جواب خصوصی معادله زیر را بیابید.

$$(ب) \quad y' = (-\cos x)y + 6 \cos x \quad y(0) = 1$$

۲، ۱ حل معادلات برنولی

گاهی یک معادله مرتبه اول خطی نیست، ولی با تغییری می‌توان معادله را خطی کرد. یکی از مهمترین دسته این معادلات، معادلات برنولی نام دارد و شکل کلی این معادلات به صورت زیر است.

$$y' + p(x)y = g(x)y^a$$

(a عدد حقیقی و ثابت است)

توجه: اگر $a = 0$ یا $a = 1$ معادله خطی است که حل آن را از درس قبل می‌دانیم.

برای حل معادلات برنولی:

قدم اول طرفین معادله را در y^{-a} ضرب می‌کنیم.

$$y^{-a}y' + p(x)y^{1-a} = g(x)$$

قدم دوم تغییر متغیر $z := y^{1-a}$ را اعمال می‌کنیم.

$$z = y^{1-a} \Rightarrow z' = (1-a)y^{-a}y'$$

قدم سوم معادله داده شده را برحسب متغیر جدید بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{z'}{1-a} + p(x)z = g(x)$$

مشاهده می‌کنیم که معادله به دست آمده یک معادله خطی است و مطابق روش حل معادلات خطی مرتبه اول می‌توان حل نمود.

مثال ۱۰,۱. معادله $xy' + y = y^2 \ln x$ را حل کنید.
 دقت می‌کنیم که معادله برنولی با $a = 2$ است. طرفین را در y^{-2} ضرب می‌کنیم.

$$xy^{-2}y' + y^{-1} = x^2 \ln x \quad (3, 1)$$

تغییر متغیر $z := y^{-1}$ می‌دهیم.

$$z' = -y' y^{-2}$$

معادله ۳,۱ را بر حسب متغیر جدید می‌نویسیم.

$$-xz' + z = x^2 \ln x \quad \text{معادله خطی مرتبه اول}$$

ضریب z' را یک می‌کنیم

$$\begin{aligned} z' - \frac{1}{x}z &= -x \ln x \\ \mu(x) &= e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z &= \frac{d(\frac{1}{x}z)}{dx} = -\ln x \\ \Rightarrow \frac{1}{x}z &= \int -\ln x dx = -x \ln x + \int dx \\ \ln x &= u, \quad dx = dv \\ \Rightarrow \frac{1}{x}z &= -x \ln x + x + c \\ \Rightarrow z &= -x^2 \ln x + x^2 + cx \\ \Rightarrow y^{-1} &= -x^2 \ln x + x^2 + cx \end{aligned}$$



مثال ۱۱,۱. معادله زیر را حل کنید.

$$2xyy' = (1+x)y^2 = e^x$$

با کمی دقت و بازنویسی معادله می‌بینیم که معادله یک معادله برنولی است.

$$\begin{aligned} y' + \frac{1+x}{x}y &= \frac{e^x}{x}y^{-1} \\ \times y \Rightarrow yy' + \frac{1+x}{x}y^2 &= \frac{e^x}{x} \\ z := y^2 \Rightarrow z' &= 2yy' \end{aligned}$$

$$\frac{z'}{2} + \frac{1+x}{2x}z = \frac{e^x}{2x} \quad (۴,۱)$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int \frac{1+x}{x} dx} = e^{\int \frac{dx}{x} + \int dx} = xe^x \\ ۴,۱ \times \mu &\Rightarrow xe^x z' + e^x(1+x)z = e^{2x} \\ &\Rightarrow \frac{d(xe^x z)}{dx} = e^{2x} \\ &\Rightarrow xe^x z = \int e^{2x} dx \\ &\Rightarrow xe^x z = \frac{1}{2}e^{2x} + c \\ &\Rightarrow z = \frac{1}{2x}e^x + \frac{c}{x}e^{-x} \\ &\Rightarrow y^2 = \frac{1}{2x}e^x + \frac{c}{x}e^{-x} \end{aligned}$$



تمرین ۱، ۱۲. جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

(الف) $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad x > 0$

(ب) $(1+x^2)y' - 2xy = y^2$

(ج) $y' = (a \cos x + b)y - y^3$ a, b ثابت است

(د) $y' \cos x + y \sin x + y^2 = 0$

(ه) $2xyy' = x^2 + 3y^2$

(و) $y' = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}$

(ز) $x^2 \ln x - 2xy^2 + 3x^2 y^2 y' = 0$

۳,۱ معادلات جدا شدنی

قبلا دیدیم که شکل کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر است.

$$F(x, y, y') = 0$$

در اغلب موارد می‌توانیم y' را به صورت فرمول صریح برحسب x و y بنویسیم. یعنی معادله را به صورت زیر بنویسیم.

$$y' = f(x, y)$$

می‌توانیم فرض کنیم $f(x, y) = \frac{M(x, y)}{-N(x, y)}$.

مثال ۱, ۱۳. به عنوان مثال اگر $f(x, y) = \frac{2x + e^y}{2y + \sin x}$ ، آنگاه

$$M(x, y) = 2x + e^y, \quad N(x, y) = -(2y + \sin x)$$

یا اگر $f(x, y) = \sin(x + y)$ ، آنگاه $N(x, y) = -1$ ، $M(x, y) = \sin(x + y)$ ▲

در این صورت می‌توان معادله دیفرانسیل زیر را

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y) = \frac{M(x, y)}{-N(x, y)}$$

به صورت زیر نوشت

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

مثال ۱, ۱۴.

$$\begin{aligned} y' = \frac{2x + e^y}{2y + \sin x} &\Rightarrow (2x + e^y)dx - (2y + \sin x)dy = 0 \\ y' = \sin(x + y) &\Rightarrow \sin(x + y)dx - dy = 0 \end{aligned}$$

▲

تعریف ۱, ۱۵. اگر در معادله مرتبه اول $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ، تابع $M(x, y)$

فقط تابعی از x و $N(x, y)$ فقط تابعی از y باشد، یعنی معادله به فرم زیر باشد

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

این معادله را معادله جداشدنی می‌نامیم. ▲

با توجه به شکل ساده این معادلات، می‌بینیم که با انتگرال‌گیری از هر یک از جملات، معادله را می‌توانیم حل کنیم.

مثال ۱۶،۱. معادله $y' = e^{x+y+1}$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{x+1}e^y = \frac{e^{x+1}}{e^{-y}} \\ \Rightarrow e^{x+1}dx &= e^{-y}dy \\ \Rightarrow \int e^{x+1}dx &= \int e^{-y}dy \\ \Rightarrow e^{x+1} &= -e^{-y} + c \\ \Rightarrow e^{x+1} + e^{-y} &= c \end{aligned}$$

▲

در حالت کلی

قضیه ۱۷،۱. برای معادله جداشدنی $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ، اگر $H(x) = \int M(x)dx$ و $G(y) = \int N(y)dy$ آنگاه $H(x) + G(y) = c$ جواب عمومی معادله است.

اثبات. باید نشان دهیم تابع y که در رابطه $H(x) + G(y) = c$ صدق می‌کند، در معادله داده شده صادق است.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(H(x) + G(y)) &= \frac{dH(x)}{dx} + \frac{dG(y)}{dx} = 0 \\ \Rightarrow \frac{dH(x)}{dx} + \frac{dG(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \text{فرض} \Rightarrow M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow M(x)dx + N(y)dy &= 0. \end{aligned}$$

■

نتیجه ۱۸,۱. جواب عمومی معادله جداشدنی $M(x)dx + N(y)dy = 0$ عبارتست از

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

مثال ۱۹,۱. جواب عمومی معادله $(e^x + 1)\frac{dy}{dx} = y - ye^x$ را به دست آورید.
حل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y(1-e^x)}{e^x+1} \\ \Rightarrow \frac{dy}{y} &= \frac{(1-e^x)}{e^x+1} dx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{(1-e^x)}{e^x+1} dx \\ \Rightarrow \ln y &= \int \frac{1}{e^x+1} dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \\ \Rightarrow \ln y &= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx \\ \Rightarrow \ln y &= -\ln(1+e^{-x}) - \ln(1+e^x) + c_1 \\ \Rightarrow y &= e^{\ln(1+e^{-x})^{-1} \ln(1+e^x)^{-1}} c, \quad c = e^{c_1} \\ \Rightarrow y &= c \frac{1}{1+e^{-x}} \cdot \frac{1}{1+e^x}. \end{aligned}$$



مثال ۲۰,۱. معادله $y' = xy^2 + y^2 + xy + y$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x(y^2 + y) + y^2 + y = (y^2 + y)(x + 1) \\ \Rightarrow \frac{dy}{y^2+y} &= (x + 1)dx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+y} &= \int (x + 1)dx \\ \frac{1}{y^2+y} &= \frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{Ay+A+By}{y(y+1)} \\ \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} &\Rightarrow B=-1 \\ \frac{1}{y^2+y} &= \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+y} &= \int \frac{dy}{y+1} = \int (x+1)dx \\ \Rightarrow \int \ln y - \ln(y+1) &= \frac{1}{2}x^2 + x + c_1 \\ \Rightarrow \ln \frac{y}{y+1} &= \frac{1}{2}x^2 + x + c_1 \\ \Rightarrow \frac{y}{y+1} &= ce^{\frac{1}{2}x^2+x}, \quad c = e^{c_1}. \end{aligned}$$

e اثر می‌دهیم



مثال ۲۱،۱. معادله زیر را حل کنید.

$$y^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} dy = \sin^{-1} x dx \quad y(0) = 0$$

$$\begin{aligned} y^{\frac{1}{2}} dy &= \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} dx \\ \int y^{\frac{1}{2}} dy &= \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{2}}}} dx \\ \sin^{-1} x = u &\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{2}}}} = du \\ \Rightarrow \frac{1}{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} &= \int u du = \frac{1}{2} u^2 + c \\ \Rightarrow \frac{1}{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} &= \frac{1}{2} \sin^{-1} x + c \\ y(0) = 0 &\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \sin^{-1} 0 + c \Rightarrow c = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} &= \frac{1}{2} \sin^{-1} x. \end{aligned}$$



تمرین ۲۲،۱. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $y' = \frac{1+3x^{\frac{1}{2}}}{3y^{\frac{2}{3}}-6y}$

(ب) $y' = xy^{\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$

(ج) $y' = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 1$

(د) $y' = (3x^{\frac{1}{2}} - 1)(3 + 2y)$

۴،۱ معادلات کامل

به عنوان یک مثال ساده معادله مرتبه اول $x dy + y dx = 0$ را در نظر بگیرید می‌دانیم که برای تابع $\psi(x, y) = xy$ داریم

$$\text{مشتق تابع } \psi \text{ نسبت به } x = \frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\psi(x, y) = xy \Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = y + x \frac{dy}{dx}$$

پس برای تابع $\psi(x, y) = xy = c$ داریم

$$\frac{d\psi}{dx} \Rightarrow ydx + xdy = 0$$

در معادله صدق می‌کند. $\psi(x, y) = xy$

سؤال ۱، ۲۳. تابع $\psi(x, y) = xy = c$ چه خاصیتی داشت که جواب معادله $ydx + xdy = 0$ شد؟

$$\left. \begin{array}{l} ydx + xdy = 0 \\ M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M(x, y) = y \\ N(x, y) = x \end{array}$$

$$\psi(x, y) = xy \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = y = M(x, y) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = x = N(x, y) \end{cases}$$

در حالت کلی

تعریف ۱، ۲۴. معادله مرتبه اول $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ را معادله کامل گوئیم هرگاه تابعی مانند $\psi(x, y)$ وجود داشته باشد، به طوری که $\psi_x = M(x, y)$ و $\psi_y = N(x, y)$.

▲

با استفاده از تعریف معادله کامل به راحتی می‌توان دید که $\psi(x, y) = c$ جواب معادله است.

قضیه ۱، ۲۵. اگر معادله $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ یک معادله کامل باشد، آنگاه $\psi(x, y) = c$ جواب معادله است.

اثبات. کافی است نشان دهیم که $\psi(x, y) = c$ در معادله صدق می‌کند.

$$\psi(x, y) = c \Rightarrow \frac{d}{dx} \psi(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

طبق تعریف

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M(x, y) + N(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow M(x, y)dx + N(x, y)dy &= 0. \end{aligned}$$

■

سؤال ۱، ۲۶. از کجا تشخیص بدهیم که یک معادله کامل است؟

سؤال ۱، ۲۷. در یک معادله کامل چگونه تابع $\psi(x, y)$ را پیدا کنیم؟

قضیه زیر محکی برای کامل بودن یک معادله مرتبه اول است و به سوال ۱، ۲۶ پاسخ می‌دهیم.

قضیه ۱، ۲۸. معادله $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ یک معادله کامل است اگر و تنها اگر $M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = N_x$.

اثبات. اثبات یک طرف قضیه بالا واضح است.

$$\text{طبق تعریف} \Rightarrow \exists \psi(x, y) \begin{cases} \psi_x = M \\ \psi_y = N \end{cases} \text{ معادله کامل باشد}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} = \psi_{x,y} = \frac{\partial M}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} = \psi_{y,x} = \frac{\partial N}{\partial x} \end{cases}$$

$$\psi_{x,y} = \psi_{y,x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

■

از اثبات طرف دوم، صرف نظر می‌کنیم.

پس با توجه به قضیه قبل به راحتی می‌توانیم تشخیص بدهیم که یک معادله کامل هست یا نه.

مثال ۱، ۲۹. کدامیک از معادلات زیر کامل هستند؟

۱. $(y \sin x + xy \cos x)dx + (x \sin x + 1)dy = 0$

$$M(x, y) = y \sin x + xy \cos x \Rightarrow M_y = \sin x + x \cos x$$

$$N(x, y) = x \sin x + 1 \Rightarrow N_x = \sin x + x \cos x$$

$$M_y = N_x \Rightarrow \text{معادله کامل است}$$

۲. $(y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0$

$$M(x, y) = y^2 + xy \Rightarrow M_y = 2y + x$$

$$N(x, y) = -x^2 \Rightarrow N_x = -2x$$

$$M_y \neq N_x \Rightarrow \text{معادله کامل نیست}$$



حال به پاسخ سوال ۲۷، ۱ می‌پردازیم، که چگونه در یک معادله کامل، تابع $\psi(x, y)$ به عبارت دیگر جواب معادله را بیابیم. ابتدا این روش را در حل یک مثال، بیان می‌کنیم و بعد به بیان روش حل در حالت کلی می‌پردازیم.

مثال ۱، ۳۰. معادله $(y \sin x + xy \cos x)dx + (x \sin x + 1)dy = 0$ را حل کنید. قبلاً دیدیم که معادله کامل است زیرا دیدیم که $M_y = N_x$

$$\text{تعریف} \Rightarrow \text{معادله کامل} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_x = M(x, y) \\ \psi_y = N(x, y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_x = y \sin x + xy \cos x \\ \psi_y = x \sin x + 1 \end{cases}$$

و به دنبال یافتن ψ هستیم.

۱.

$$\psi_y = x \sin x + 1 \Rightarrow \psi(x, y) = \int (x \sin x + 1) dy \Rightarrow$$

$$\psi(x, y) = xy \sin x + y + h(x) \quad (5, 1)$$

$h(x)$ تابعی که نسبت به y ثابت است پس فقط به x بستگی دارد.

۲. از $\psi(x, y)$ در ۵, ۱ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi_x &= y \sin x + xy \cos x + h'(x) \\ \psi(x) = M &\Rightarrow y \sin x + xy \cos x + h'(x) = y \sin x + xy \cos x \\ \Rightarrow h'(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$h(x) = c_1 \quad (۶, ۱)$$

۳.

$$۶, ۱, ۵, ۱ \Rightarrow \psi(x, y) = xy \sin x + y + c_1$$

$$\psi(x, y) = c \Rightarrow xy \sin x + y = c. \quad \text{جواب عمومی}$$

▲

در حالت کلی برای یافتن پاسخ معادله مرتبه کامل $Mdx + Ndy = 0$ که در آن بنا به تعریف تابع ψ وجود دارد که $\psi_x = M, \psi_y = N$ می‌توانیم به یکی از سه روش زیر تابع ψ را پیدا کنیم.

(الف) (۱) از رابطه $\psi_x = M$ نسبت به x انتگرال بگیریم.

(۲) از ψ به دست آمده نسبت به y مشتق بگیریم.

(۳) حاصل مرحله (۲) را مساوی N قرار دهیم تا تابع $h'(y)$ که از مرحله (۲)

ایجاد می‌شود به دست بیاید. در نتیجه $h(y)$ به دست می‌آید.

$$\psi(x, y) = c \quad \text{جواب عمومی معادله} \quad (۴)$$

(ب) (۱) از رابطه $\psi_y = N$ نسبت به y انتگرال بگیریم.

(۲) از ψ به دست آمده نسبت به x مشتق بگیریم.

(۳) حاصل مرحله (۲) را مساوی M قرار دهیم تا $h'(x)$ که در مرحله (۲) ایجاد

می‌شود به دست بیاید. در نتیجه $h(x)$ به دست می‌آید.

$$\psi(x, y) = c \quad \text{جواب عمومی معادله} \quad (۴)$$

(ج) (۱) از رابطه $\psi_x = M$ نسبت به x انتگرال بگیریم.

(۲) از رابطه $\psi_y = N$ نسبت به y انتگرال بگیریم.

(۳) دو $\psi(x, y)$ به دست آمده از مراحل (۱) و (۲) را مساوی قرار دهیم تا $h(x)$ و $h(y)$ معلوم شود.

(۴) $\psi(x, y) = c$ جواب عمومی معادله

مثال ۱، ۳۱. معادله $(3y + e^x)dx + (3x + \cos y)dy = 0$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 3y + e^x &\Rightarrow M_y &= 3 &\Rightarrow M_y &= N_x \\ N(x, y) &= 3x + \cos y &\Rightarrow N_x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{تعریف} \Rightarrow \exists \psi(x, y) &\begin{cases} \psi_x = 3y + e^x \\ \psi_y = 3x + \cos y \end{cases} \\ \text{معادله کامل} & \end{aligned}$$

۱. از رابطه $\psi_x = M$ نسبت به x انتگرال می‌گیریم.

$$\Rightarrow \psi(x, y) = 3xy + e^x + h(y)$$

۲. از ψ نسبت به y انتگرال می‌گیریم.

$$\Rightarrow \psi(x, y) = \int (3x + \cos y) dy$$

$$\Rightarrow \psi(x, y) = 3xy + \sin y + h(x)$$

۳. ψ به دست آمده از (۱) و (۲) را مساوی قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow 3xy + e^x + h(y) = 3xy + \sin y + h(x)$$

$$\Rightarrow h(x) = e^x, \quad h(y) = \sin y$$

۴.

$$\psi(x, y) = 3xy + e^x + \sin y = c. \quad \text{جواب عمومی معادله}$$



مثال ۳۲، ۱. معادله $(4x^3y + y^4)dx + (x^4 + 4xy^3)dy = 0$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} M(x, y) = 4x^3y + y^4 &\Rightarrow M_y = 4x^3 + 4y^3 \\ N(x, y) = x^4 + 4xy^3 &\Rightarrow N_x = 4x^3 + 4y^3 \end{aligned} \Rightarrow M_y = N_x$$

$$\begin{aligned} \text{تعریف} \Rightarrow \exists \psi(x, y) \quad \psi_x &= 4x^3y + y^4 \quad (1) \\ \psi_y &= x^4 + 4xy^3 \quad (2) \end{aligned}$$

۱. از رابطه ψ_x نسبت به x انتگرال می‌گیریم.

$$(1) \Rightarrow \psi(x, y) = \int (4x^3y + y^4)dx$$

$$\Rightarrow \psi(x, y) = x^4y + xy^4 + h(y) \quad (7, 1)$$

۲. از نسبت به y مشتق می‌گیریم.

$$7, 1 \Rightarrow \psi_y = x^4 + 4xy^3 + h'(y)$$

۳. ψ_y را مساوی N قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow x^4 + 4xy^3 + h'(y) &= x^4 + 4xy^3 \\ \Rightarrow h'(y) &= 0 \\ \Rightarrow h(y) &= c_1 \end{aligned}$$

۴.

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= x^4y + xy^4 + c_1 = c_2 \\ \Rightarrow x^4y + xy^4 &= c \end{aligned}$$

جواب عمومی معادله



تمرین ۳۳، ۱. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $(x^2 + y^2)^2(xdx + ydy) + 2dx + 3dy = 0$

(ب) $(2 + 2x^2y^{\frac{1}{2}})ydx + (x^2y^{\frac{1}{2}} + 2)xdy = 0$

(ج) $y^2e^{-y}dx + (2x - xy + 2)ye^{-y} = 0$

۵,۱ عامل انتگرال ساز

معادله $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ را در نظر بگیرید دیدیم که برای اینکه این معادله کامل باشد باید تعادلی در معادله برقرار باشد $(M_y = N_x)$. بسیاری از معادلات این خاصیت را ندارند، ولی می‌توانیم با تغییراتی آنها را به معادله کامل تبدیل کنیم.

مثال ۱, ۳۴. معادله $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} M(x, y) &= y^2 + xy &\Rightarrow M_y &= 2y + x \\ N(x, y) &= -x^2 &\Rightarrow N_x &= -2x \end{aligned} \Rightarrow M_y \neq N_x$$

معادله کامل نیست. حال معادله را در تابع $\mu(x, y) = \frac{1}{xy^2}$ ضرب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \times \frac{1}{xy^2} &\Rightarrow \frac{1}{xy^2}(y^2 + xy)dx - \frac{1}{xy^2}x^2dy = 0 \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\Rightarrow M_y &= -\frac{1}{y^2} \\ N(x, y) &= -\frac{x}{y^2} &\Rightarrow N_x &= -\frac{1}{y^2} \end{aligned} \Rightarrow M_y = N_x$$



معادله کامل است.

به چنین توابعی که معادله مرتبه اول را تبدیل به معادله کامل می‌کند، عامل انتگرال ساز می‌گوییم
عامل انتگرال ساز مثال بالا تابع $\frac{1}{xy^2}$ است.

سؤال ۱, ۳۵. چگونه تابع عامل انتگرال ساز را پیدا کنیم.

به دنبال عامل انتگرال ساز $\mu(x, y)$ هستیم به طوری که با ضرب کردن آن در طرفین

معادله $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ، معادله جدید یک معادله کامل باشد.

$$\begin{aligned} M(x, y) + N(x, y)dy &= 0 \\ \times \mu(x, y) \Rightarrow (\mu M) + (\mu N)dy &= 0 \\ (\mu M)_y &\stackrel{?}{=} (\mu N)_x \end{aligned}$$

باید μ را به گونه‌ای پیدا کنیم که تساوی بالا برقرار باشد.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu_y M + \mu M_y &= \mu_x N + \mu N_x \\ \Rightarrow \mu(M_y - N_x) &= \mu_x N - \mu_y M \quad (*) \\ \Rightarrow \mu(x, y) &= \text{تابعی است که در معادله دیفرانسیل فوق صدق می‌کند} \end{aligned}$$

متأسفانه حل معادله (*) در حالت کلی آسان نیست ((*) معادله دیفرانسیل جزئی است) ولی می‌توانیم با اضافه کردن شرایطی بر μ ، در حالت‌های خاص عامل انتگرال ساز را بیابیم.
حالت اول. اگر μ فقط به x بستگی داشته باشد.

$$\begin{aligned} \mu = \mu(x) \Rightarrow \mu_x &= \frac{d\mu}{dx} \\ \mu_y &= 0 \\ \mu(M_y - N_x) &= \mu_x N - \mu_y M \\ \mu_y = 0 \Rightarrow \mu(M_y - N_x) &= \frac{d\mu}{dx} N \\ \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} &= \frac{M_y - N_x}{N} dx \end{aligned}$$

اگر تابع $\frac{M_y - N_x}{N}$ فقط تابعی از x باشد، معادله بالا یک معادله جداشدنی است و از آن می‌توان به راحتی تابع $\mu(x)$ را به دست آورد.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{M_y - N_x}{N} \\ \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} &= \int R(x) dx \\ \Rightarrow \ln \mu &= \int R(x) dx \\ \Rightarrow \mu(x) &= e^{\int R(x) dx} \end{aligned}$$

نتیجه ۱، ۳۶. اگر $R(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$ فقط به x بستگی داشته باشد،

$$\mu(x) = e^{\int R(x)dx}$$

عامل انتگرال ساز است.

حالت دوم.

اگر μ فقط به y بستگی داشته باشد.

$$\begin{aligned} \mu = \mu(y) &\Rightarrow \mu_x = 0 \\ &\mu_y = \frac{d\mu}{dy} \\ &\mu(M_y - N_x) = \mu_x N - \mu_y M \\ \mu_x = 0 &\Rightarrow \mu(M_y - N_x) = -\frac{d\mu}{dy} M \\ &\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{-M} dy \end{aligned}$$

اگر تابع $\frac{M_y - N_x}{-M}$ فقط تابعی از y باشد، معادله بالا یک معادله جدشدنی است و از آن می‌توان به راحتی تابع $\mu(y)$ را به دست آورد.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{M_y - N_x}{-M} \\ &\Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int R(y) dy \\ &\Rightarrow \ln \mu = \int R(y) dy \\ &\Rightarrow \mu(y) = e^{\int R(y) dy} \end{aligned}$$

نتیجه ۱، ۳۷. اگر $R(y) = \frac{M_y - N_x}{-M}$ فقط به y بستگی داشته باشد، آنگاه

$$\mu(y) = e^{\int R(y) dy}$$

عامل انتگرال ساز است.

حالت سوم.

اگر μ تابعی از ترکیب خاصی از متغیرهای x و y باشد.

$$\mu = \mu(z(x, y))$$

برای مثال تابع $z(x, y)$ به صورت زیر باشد

$$z = xy, \quad z = \frac{x}{y}, \quad z = x + y, \quad z = x^2 + y^2$$

در این حالت هم باید تابع $\mu(x, y)$ را به صورت تابعی از متغیر z تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} \mu(x, y) = \mu(z) &\Rightarrow \begin{aligned} \mu_x &= \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ \mu_y &= \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned} \\ &\Rightarrow \mu(M_y - N_x) = \mu_x N - \mu_y M \\ &\Rightarrow \mu(M_y - N_x) = \frac{d\mu}{dz} \left(\frac{\partial z}{\partial x} N - \frac{\partial z}{\partial y} M \right) \\ &\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M} dz \end{aligned}$$

اگر μ تابعی از ترکیب خاصی از x و y مانند z باشد، باید تابع $R(z) = \frac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M}$ فقط تابعی از z باشد، در این صورت

$$\mu(z) = e^{\int R(z) dz}$$

عامل انتگرال ساز است.

نتیجه ۳۸،۱. شرط اینکه معادله داری عامل انتگرال ساز بر حسب xy باشد، این است که

$$z = xy \Rightarrow z_x = y, \quad z_y = x$$

$$\Rightarrow R(xy) = \frac{M_y - N_x}{yN - xM}$$

فقط به xy بستگی داشته باشد.

مثال ۳۹،۱. معادله دیفرانسیل $(1 + y^2)dx + xydy = 0$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} M(x, y) = 1 + y^2 &\Rightarrow M_y = 2y \\ N(x, y) = xy &\Rightarrow N_x = y \end{aligned} \Rightarrow M_y \neq N_x$$

معادله کامل نیست. $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x} = R(x)$ فقط به بستگی دارد.

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int R(x)dx} \text{ عامل انتگرال ساز است}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\times x \Rightarrow x(1 + y^2)dx + x^2ydy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} M(x, y) = x(1 + y^2) &\Rightarrow M_y = 2xy \\ N(x, y) = x^2y &\Rightarrow N_x = 2xy \end{aligned} \Rightarrow M_y = N_x$$

معادله کامل است.

$$\exists \psi(x, y) \quad \begin{aligned} \psi_x &= x(1 + y^2) & (1) \\ \psi_y &= x^2y & (2) \end{aligned}$$

از (۱) انتگرال گیری نسبت به x

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \int x(1 + y^2)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(1 + y^2) + h(y) \\ \Rightarrow \psi_y &= x^2y + h'(y) \stackrel{(2)}{=} x^2y \\ \Rightarrow h'(y) &= 0 \\ \Rightarrow h(y) &= c_1 \\ \Rightarrow \psi(x, y) &= \frac{1}{2}x^2(1 + y^2) = c \text{ جواب معادله} \end{aligned}$$



مثال ۱، ۴۰. معادله دیفرانسیل $ydx + (2x - xy + 2)dy = 0$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} M(x, y) = y &\Rightarrow M_y = 1 \\ N(x, y) = 2x - xy + 2 &\Rightarrow N_x = 2 - y \end{aligned} \Rightarrow M_y \neq N_x$$

معادله کامل نیست. $\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1 - 2 + y}{-y} = \frac{1 - y}{y} = \frac{1}{y} - 1 = R(y)$ فقط به بستگی دارد.

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int R(y)dy} \text{ عامل انتگرال ساز است}$$

$$\mu(y) = e^{\int (\frac{1}{y} - 1)dy} = e^{\ln y - y} = ye^{-y}$$

$$\begin{aligned} \times ye^{-y} &\Rightarrow y^{\vee}e^{-y}dx + ye^{-y}(\vee x - xy + \vee)dy = \circ \\ \Rightarrow M(x, y) &= y^{\vee}e^{-y} &\Rightarrow M_y &= \vee ye^{-y} - y^{\vee}e^{-y} \\ \Rightarrow N(x, y) &= ye^{-y}(\vee x - xy + \vee) &\Rightarrow N_x &= \vee ye^{-y} - y^{\vee}e^{-y} \\ &&&M_y = N_x \text{ معادله کامل است.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists \psi(x, y) \quad \psi_x &= y^{\vee}e^{-y} & (1) \\ \psi_y &= ye^{-y}(\vee x - xy + \vee) & (2) \end{aligned}$$

از (۱) انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= y^{\vee}xe^{-y} + h(y) \\ \Rightarrow \psi_y &= \vee yxe^{-y} - y^{\vee}xe^{-y} + h'(y) \\ \psi_y = N &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \vee xye^{-y} - y^{\vee}xe^{-y} + h'(y) = ye^{-y}(\vee x - xy + \vee) \\ \Rightarrow h'(y) &= \vee ye^{-y} \\ \Rightarrow h(y) &= \int \vee ye^{-y} dy = -\vee ye^{-y} + \vee \int e^{-y} dy \\ y = u &\Rightarrow dy = du \\ -e^{-y} dy &= dv \Rightarrow v = e^{-y} \\ \Rightarrow h(y) &= -\vee ye^{-y} - \vee e^{-y} \\ \Rightarrow \psi(x, y) &= y^{\vee}xe^{-y} - \vee ye^{-y} - \vee e^{-y} = c \end{aligned}$$



مثال ۱، ۴۱. معادله $x(\vee - xy)dy = y(\vee + xy)dx = \circ$ را حل کنید.

$$y(\vee + xy)dx - x(\vee - xy)dy = \circ$$

$$\begin{aligned} M(x, y) = y(\vee + xy) &\Rightarrow M_y = \vee - \vee xy &\Rightarrow M_y \neq N_x \\ N(x, y) = -x(\vee - xy) &\Rightarrow N_x = -\vee - \vee xy \end{aligned}$$

معادله کامل نیست.

$$M_y - N_x = \vee - \vee xy + \vee + \vee xy = \vee$$

$$R(xy) = \frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{2}{-xy(1-xy) - xy(1+xy)} = \frac{-1}{xy}$$

در نتیجه معادله دارای عامل انتگرال ساز $\mu(x, y)$ است و

$$\mu(xy) = e^{\int R(xy)d(xy)}$$

$$\mu(xy) = e^{\int \frac{-d(xy)}{xy}} = e^{-\ln(xy)} = \frac{1}{xy}$$

معادله داده شده \circ $y(1+xy)dx - x(1-xy)dy = \circ$

$$\times \frac{1}{xy} \Rightarrow \frac{1}{x}(1+xy)dx - \frac{1}{y}(1-xy)dy = \circ$$

$$\Rightarrow M(x, y) = \frac{1}{x}(1+xy) \Rightarrow M_y = 1 \Rightarrow M_y = N_x$$

$$\Rightarrow N(x, y) = -\frac{1}{y}(1-xy) \Rightarrow N_x = 1$$

معادله کامل است.

$$\exists \psi(x, y) \quad \begin{cases} \psi_x = \frac{1}{x} + y & (1) \\ \psi_y = -\frac{1}{y} + x & (2) \end{cases}$$

از (۱) انتگرال می‌گیریم بر حسب x

$$\psi(x, y) = \ln x + xy + h(y)$$

مشتق گیری بر حسب y

$$\Rightarrow \psi_y = x + h'(y)$$

$$\psi_y = N \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x + h'(y) = -\frac{1}{y} + x$$

$$\Rightarrow h'(y) = -\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow h(y) = -\ln y$$

$$\Rightarrow \psi(x, y) = \ln x + xy - \ln y = c.$$



تمرین ۱، ۴۲.

(الف) $(e^{-x} + \sin y)dx + \cos y dy = \circ$

(ب) $(\frac{y}{x} \ln(\ln y) + \frac{y}{x^2} xy^x)dx + (\frac{\ln x}{\ln y} + x^y y^x)dy = 0$

(ج) $(1 + y^y)dx + xydy = 0$

(د) $(x - \cos y)dx - \sin ydy = 0$

(ه) $xdy - ydx = x^y ydy$

(و) $xy' + y - x(1 - x^y y^y)^{\frac{1}{y}} = 0$

تمرین ۱، ۴۳. شرط داشتن عامل انتگرال ساز به صورت تابعی از $z = x + y$ را بیابید.

۶،۱ معادلات همگن

به یاد داریم که شکل کلی معادله دیفرانسیل مرتبه اول به شکل $y' = f(x, y)$ است. حال اگر بتوانیم تابع $f(x, y)$ را به شکل تابعی برحسب $\frac{y}{x}$ بنویسیم، به این معادله، معادله همگن گوئیم. در این صورت با یک تغییر متغیر ساده به فرم زیر می‌توان معادله را به یک معادله جداشدنی تبدیل، و حل کنیم. قرار می‌دهیم $z := \frac{y}{x}$ پس داریم

$$y = xz \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

در نتیجه معادله $y' = f(\frac{y}{x})$ به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} y' = f(\frac{y}{x}) &\mapsto z + x \frac{dz}{dx} = f(z) \\ \mapsto x \frac{dz}{dx} &= f(z) - z \\ \mapsto \frac{dz}{f(z)-z} &= \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

که یک معادله جداشدنی است.

مثال ۱، ۴۴. کدامیک از معادلات زیر همگن هستند؟

(الف) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^y + yxy}{x^y} = (\frac{y}{x})^y + y(\frac{y}{x})$

(ب) $\frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln \frac{x}{y} + \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$

(ج) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$



مثال ۱، ۴۵. معادله زیر را حل کنید.

$$2xyy' = 3y^2 - x^2$$

$$y' = \frac{3y}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3y}{x} - \frac{1}{y}$$

تغییر متغیر $z := \frac{y}{x}$ در نتیجه

$$y = xz \Rightarrow y' = z + xz' \Rightarrow z + xz' = \frac{3}{x}z - \frac{1}{xz}$$

با انجام ساده سازی و نوشتن معادله جداشدنی داریم:

$$xz' = \frac{3}{x}z - \frac{1}{xz} - z = \frac{z^2 - 1}{xz}$$

$$\Rightarrow \frac{z dz}{z^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

با انتگرال گیری از طرفین z به دست می‌آید.

$$\int \frac{z dz}{z^2 - 1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |z^2 - 1| = \ln |x| + c_1$$

برای از بین بردن \ln به طرفین تابع e را اثر می‌دهیم.

$$z^2 - 1 = cx \quad (c = e^{c_1})$$

حال z را همان $\frac{y}{x}$ جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = cx \Rightarrow y^2 = cx^3 + x^2.$$



تمرین ۱، ۴۶. معادله زیر را حل کنید.

$$(x - \sqrt{xy})y' = y$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول _____ ۲۹

سؤال ۱، ۴۷. آیا می‌توان بعضی معادلات غیرهمگن را با تغییر متغیر مناسب به معادله همگن تبدیل کرد؟

به عنوان مثال آیا می‌توان معادله $y' = \frac{x+y+1}{x-y+3}$ را همگن کرد؟
جواب: بله.

در حالت کلی گاهی معادله $y' = f(x, y)$ همگن نیست ولی با تغییر متغیر مناسب می‌توان آن را همگن کرد.

معادله $y' = F\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$ را در نظر بگیرید. سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

(الف) $c = 0$ و $f = 0$ در این صورت داریم

$$y' = F\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{d + e\frac{y}{x}}\right)$$

که یک معادله همگن است.

(ب) $c \neq 0$ یا $f \neq 0$ و $ae = bd$.

در این صورت یک ترکیب خطی مناسب از x و y به صورت $\alpha x + \beta y$ را می‌توانیم متغیر جدیدی تعریف کنیم و معادله را ساده کنیم. (مقادیر α و β به مقادیر a, b, c و d بستگی دارد.

مثال ۱، ۴۸. معادله زیر را حل کنید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{2x + 2y + 3}$$

در این معادله $ae = bd$. قرار می‌دهیم $z := x + y$ پس داریم:

$$z' = 1 + y'$$

و پس از بازنویسی معادله داریم:

$$z' - 1 = \frac{z + 1}{2z + 3}$$

که یک معادله جداشدنی است.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{z+1}{z+3} + 1 = \frac{z+4}{z+3} \Rightarrow \frac{z+3}{z+4} dz = dx \\ &\Rightarrow \int \frac{z+3}{z+4} dz = \int dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \int \frac{z+\frac{3}{4}}{z+\frac{4}{4}} dz = x + c \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \int \frac{z+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{z+\frac{4}{4}} dz = x + c \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} z + \frac{1}{4} \ln |z + \frac{4}{4}| = x + c \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} (x + y) + \frac{1}{4} \ln |z + \frac{4}{4}| = x + c. \end{aligned}$$



(ج) $c \neq 0$ یا $f \neq 0$ و $ae \neq bd$.

در این حالت با تغییر متغیرهای مناسب $x = X + h$ و $y = Y + k$ که h و k به ضرایب a, b, c, d, e, f بستگی دارد، معادله را همگن می‌کنیم. توجه داریم که در این صورت:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$$

مثال ۱، ۴۹. معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x - y + 3} \quad ae \neq bd \quad -1 \neq 1$$

قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} x &= X + h \\ y &= Y + k \end{aligned} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X + Y + h + k}{X - Y + h - k + 3}$$

برای اینکه معادله همگن شود باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} h + k + 1 = 0 \\ h - k + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = -2 \\ k = 1 \end{cases}$$

با بازنویسی معادله داریم:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + Y}{X - Y} = \frac{1 + \frac{Y}{X}}{1 - \frac{Y}{X}}$$

که معادله همگن است.

$$\begin{aligned} z = \frac{Y}{X} &\Rightarrow Y = Xz \\ &\Rightarrow Y' = Xz' + z \\ &\Rightarrow Xz' + z = \frac{1+z}{1-z} \\ &\Rightarrow Xz' = \frac{1+z}{1-z} - z \\ Xz' = \frac{z+1}{1-z} &\Rightarrow \frac{1-z}{z+1} dz = \frac{dX}{X} \\ &\Rightarrow \int \frac{dz}{z+1} - \int \frac{z}{z+1} dz = \ln |X| + c \\ &\Rightarrow \tan^{-1} z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = \ln |X| + c. \end{aligned}$$

چون $z = \frac{Y}{X} = \frac{y-1}{x+2}$ داریم:

$$\tan^{-1}\left(\frac{y-1}{x+2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{y-1}{x+2}\right)^2\right) = \ln |x+2| + c.$$



تمرین ۱، ۵۰. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$

(ب) $(x - 3y + 3)dx - (2x - 6y + 1)dy = 0$

۷، ۱ تغییر متغیر

گاهی برای حل معادله دیفرانسیل کافی است یک تغییر متغیر مناسب اعمال کنیم و معادله را به معادله ساده‌تری تبدیل کنیم. قبلاً در حل معادلات برنولی و معادلات همگن از تغییر متغیر استفاده کرده‌ایم.

در زیر چند مثال حل می‌کنیم که از تغییر متغیر برای ساده‌سازی معادله استفاده کرده‌ایم. باید توجه داشته باشیم که در حالت کلی برای این روش فرمول مشخصی وجود

ندارد و اینکه چه تغییر متغیری اعمال کنیم، کاملاً به معادله بستگی دارد.

مثال ۱، ۵۱.

$$x(xy' + y) = xe^{\frac{x+y}{x}} + (x^2 + y^2) \quad (۸, ۱)$$

قرار می‌دهیم $z := \frac{x+y}{x}$ در نتیجه داریم:

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{x(yx + y'y') - (x^2 + y^2)}{x^2}$$

با بازنویسی معادله ۸، ۱ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{x(yx + y'y') - (x^2 + y^2)}{x^2} &= e^{\frac{x+y}{x}} \\ \Rightarrow z' &= \frac{e^z}{x} \Rightarrow e^{-z} dz = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow -e^{-z} &= \ln|x| + c \Rightarrow -e^{-\frac{x+y}{x}} = \ln|x| + c. \end{aligned}$$



مثال ۱، ۵۲. معادله زیر را حل کنید.

$$y' = y \frac{y}{x} + x \tan \frac{y}{x^2}$$

قرار می‌دهیم $z := \frac{y}{x^2}$ ، در نتیجه $y = zx^2$ بنابراین $y' = x^2 z' + 2xz$ با بازنویسی معادله داریم:

$$\begin{aligned} x^2 z' + 2xz &= 2zx + x \tan z \Rightarrow xz' = \tan z \\ \Rightarrow \frac{dz}{\tan z} &= \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{\cos z}{\sin z} dz = \ln|x| + c_1 \\ \Rightarrow \ln|\sin z| &= \ln|x| + c_1 \\ \Rightarrow |\sin z| &= cx \quad (c = e^{c_1}) \\ \Rightarrow \left| \sin \frac{y}{x^2} \right| &= cx. \end{aligned}$$



تمرین ۱، ۵۳.

- (الف) $yy' \sin x = \cos(\sin x - y^2)$
 (ب) $(1 + y^2) + (x - e^{\tan^{-1} y})y' = 0$
 (ج) $xy' = e^{-xy} - y$
 (د) $y' = xy + 2y \ln y \quad y(0) = 1$

۸,۱ تغییر نقش متغیر مستقل و وابسته

اگر متغیر مستقل را با x و متغیر وابسته را با y نمایش دهیم، یعنی $y = f(x)$ با فرض معکوس پذیری تابع y می‌توانیم فرض کنیم $x = f^{-1}(y)$. به عبارت دیگر نقش متغیر مستقل و وابسته را عوض می‌کنیم. در بعضی از موارد برای حل معادله دیفرانسیل این کار باعث می‌شود، معادله به یکی از فرم‌هایی تبدیل شود که حل آن را می‌دانیم.

برای این کار کافی است به جای $\frac{dy}{dx}$ ، با ضرب طرفین معادله در $\frac{dx}{dy}$ تابع مجهول را x در نظر بگیریم و معادله را حل کنیم.

مثال ۵۴,۱. معادله زیر را حل کنید:

$$y' = \frac{1}{x(1+xe^y)}$$

$$x(1+xe^y)y' = 1 \quad \times \frac{dx}{dy}$$

$$x(1+xe^y) = \frac{dx}{dy}$$

$$x' - x = x^2 e^y \quad \text{معادله برنولی}$$

حل را ادامه بدهید

۱. ضرب طرفین در x^{-2}

۲. تغییر متغیر $z = x^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = z' = -x^{-2}x' = -x^2 x'$

۳. معادله جدید $-z' - z = e^y$



مثال ۱، ۵۵. معادله زیر را حل کنید.

$$ydx + x(xy^3 + 1)dy = 0$$

معادله نسبت به y' خطی نیست. سعی می‌کنیم معادله را نسبت به $\frac{dx}{dy}$ در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned} y\frac{dx}{dy} + x(xy^3 + 1) &= 0 \\ \Rightarrow yx' + x + x^2y^3 &= 0 \\ \Rightarrow x' + \frac{1}{y}x &= -x^2y^2 \quad \text{معادله برنولی} \end{aligned}$$

۱. ضرب طرفین در x^{-2}

$$2. \text{ تغییر متغیر } z = x^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -x^{-2}x'$$

$$3. \text{ معادله جدید } -z' + \frac{1}{y}z = -y^2$$

▲

حل معادله خطی را ادامه دهید

مثال ۱، ۵۶. معادله $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 4}$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2 - 4)y' &= 2xy \quad \times \frac{dx}{dy} \\ x^2 - y^2 - 4 &= 2xyx' \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $z = x^2$ داریم $z' = 2xx'$. پس داریم $z' = 2xyx' = 2y(z - y^2 - 4)$ نتیجه $z' - \frac{1}{y}z = -y^2 - 4$ است.

$$\begin{aligned} \mu(y) = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = \frac{1}{y} &\Rightarrow \frac{d(z\frac{1}{y})}{dy} = -y - 4y^{-1} \Rightarrow \\ z\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}y^2 - 4 \ln y + c &\Rightarrow \frac{x^2}{y} = -\frac{1}{2}y^2 - \ln y^4 + c \end{aligned}$$

▲

تمرین ۱، ۵۷. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $xy' + y = 2x^2y' \ln y \quad y(1) = e$

(ب) $xy'(x - 1 + xe^y) = 1$

(ج) $ydx - (2xy - e^y)dy = 0$

تمرین‌های مروری فصل ۱

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

۱. معادلات زیر را به هر روش که مناسب است حل نمایید.

(الف) $xdy = (x^2y^2(1 + e^x) - y)dx$

(ب) $ye^y = (y^2 + 2xe^y)y'$

(ج) $(xy + y^2)dx + (xy - x^2)dy = 0$

(د) $2xyy' + (1 + x)y^2 = e^x$

(ه) $y^2 + (x^2 - xy + y^2)y' = 0$

(ی) $(2 + 2x^2y^{\frac{1}{2}})ydx + (x^2y^{\frac{1}{2}} + 2)xdy = 0$

(ر) $(x - \ln y + y \ln x)dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$

(ز) $ydx + (2x - xy + 2)dy = 0$

(س) $2yy' + y^2 \sin x - \sin x = 0$

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

۱,۲ آشنایی با اعداد مختلط

با اعداد $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ آشنا هستیم. در اینجا با مجموعه‌ای از اعداد به نام اعداد مختلط^۱ آشنا می‌شویم که مجموعه همه اعداد حقیقی را به عنوان زیرمجموعه دربردارد. مجموعه اعداد مختلط که با \mathbb{C} نمایش می‌دهیم عبارتست از مجموعه همه زوج‌های مرتب

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

برای عدد مختلط $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ ، عدد x را قسمت حقیقی z می‌نامیم و با $\operatorname{Re}(z) = x$ نمایش می‌دهیم. همچنین عدد y را قسمت موهومی می‌نامیم و با $\operatorname{Im}(z) = y$ نمایش می‌دهیم.

پس واضح است که هر عدد حقیقی را می‌توان یک عدد مختلط با قسمت موهومی صفر در نظر گرفت، یعنی $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. از نظر هندسی هر عدد مختلط در حقیقت یک نقطه در صفحه مختصات است. در زیر برای اعداد مختلط دو عمل جمع و ضرب را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱,۲. برای هر دو عدد مختلط z_1, z_2 دو عمل جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$.

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

^۱Complex Number



۲,۲ خواص جمع و ضرب عدد مختلط:

با توجه به تعریف جمع و ضرب اعداد مختلط و خواص اعمال جمع و ضرب اعداد حقیقی به راحتی می‌توان دید که خواص زیر برقرار است.

(الف) خاصیت جابه‌جایی

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 \cdot z_2 &= z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

(ب) خاصیت شرکت‌پذیری

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad \begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \end{aligned}$$

(ج) خاصیت پخش‌ی

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

(د) عضو خنثی

$$\begin{aligned} z + (0, 0) &= (x, y) + (0, 0) = z \\ z \cdot (1, 0) &= z \\ z &= (x, y) \end{aligned}$$

عضو خنثی جمع $(0, 0)$, عضو خنثی ضرب $(1, 0)$

(ه) عضو قرینه

$$\forall z = (x, y) \quad \begin{aligned} -z &= (-x, -y) \\ z + (-z) &= (0, 0) \end{aligned}$$

مثال ۲,۲. به راحتی می‌توان دید که

$$(\circ, 1) \cdot (y, \circ) = (\circ \times y - 1 \times \circ, \circ \times \circ + 1 \times y) = (\circ, y) \quad (1, 2)$$

$$(\circ, 1) \cdot (\circ, 1) = (\circ \times \circ - 1 \times 1, \circ \times 1 + 1 \times \circ) = (-1, \circ) \quad (2, 2)$$

با توجه به دو مثال بالا عدد مختلط (x, y) را بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, \circ) + (\circ, y) \\ (x, y) &= (x, \circ) + (\circ, 1) \cdot (y, \circ) \quad \text{طبق ۱,۲} \end{aligned} \quad (3, 2)$$



قرارداد: عدد مختلط $(\circ, 1)$ را با نماد i نمایش می‌دهیم.

$$i := (\circ, 1)$$

با این قرارداد رابطه ۲,۲ نشان می‌دهد که

$$i^2 = i \times i = -1$$

و رابطه ۳,۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$z = (x, y) = x + iy$$

قرارداد: هر عدد مختلط $z = (x, y)$ را با $x + iy$ نمایش می‌دهیم. جمع و ضرب دو عدد مختلط را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

مثال ۳,۲.

$$(-1 + 3i) + (2 - 5i) = 1 - 2i$$

$$(-1 + 3i) \cdot (2 - 5i) = (-2 + 15) + i((-1)(-5) + 3 \times 2) = 13 + 11i$$

$$(1 + i) \cdot i = i - i^2 = i - 1$$



نکته ۴,۲. در حقیقت ضرب دو عدد مختلط را می‌توان مانند ضرب اعداد حقیقی و با استفاده از خواص آن انجام داد و به جای i^2 ، عدد -1 قرار دهیم.

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i \end{aligned}$$

تعریف ۵,۲. برای هر عدد مختلط $z = x + iy$ ، مزدوج z را با نماد \bar{z} نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $\bar{z} = x - iy$.



تعریف ۶,۲. برای هر عدد مختلط غیر صفر $z = x + iy$ ، وارون z را با نماد z^{-1} نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $z^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$. مقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$ را قدر مطلق z می‌نامیم و با $|z|$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت:

$$zz^{-1} = (x + iy) \cdot \frac{(x - iy)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} [(x^2 + y^2) + i^0] = 1$$



مثال ۷,۲. عدد $\frac{-1+3i}{2+5i}$ را به فرم $x + iy$ بنویسید.

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1+3i}{2+5i} = (-1 + 3i)(2 + 5i)^{-1} \\ &= (-1 + 3i) \frac{2-5i}{2^2+5^2} = \frac{1}{29} (-1 + 3i)(2 - 5i) \\ &= \frac{1}{29} (13 + 11i) = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i \end{aligned}$$

در حالت کلی می‌توان گفت:

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}. \quad \text{تقسیم دو عدد مختلط}$$



نکته ۲، ۸. به راحتی از تعاریف بالا می‌توان خواص زیر را نتیجه گرفت. (تمرین)

(الف) $\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$

(ب) $\overline{(zw)} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(ج) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

(د) $z\bar{z} = |z|^2$

(ه) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

(و) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(ی) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

نتیجه ۲، ۹. دیدیم که $i^2 = -1$. به عبارت دیگر می‌توان i را ریشه دوم -1 در نظر گرفت. همچنین داریم $i^2 = -1 = (-i)^2$ یعنی $-i$ نیز ریشه دوم -1 است، در حالت کلی برای عدد حقیقی مثبت c می‌توانیم بنویسیم

$$\sqrt{-c} = \sqrt{-1}\sqrt{c} = \sqrt{c} \cdot i$$

در نتیجه در معادله $ax^2 + by + c = 0$ که ریشه‌ها به صورت

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

است اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ، داریم:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

و در این حالت معادله دارای دو ریشه مختلط $x_1 = \frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ است و دو ریشه مزدوج یکدیگر هستند.

مثال ۱۰، ۲. ریشه‌های معادله $x^2 - x + 1 = 0$ را بیابید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$$

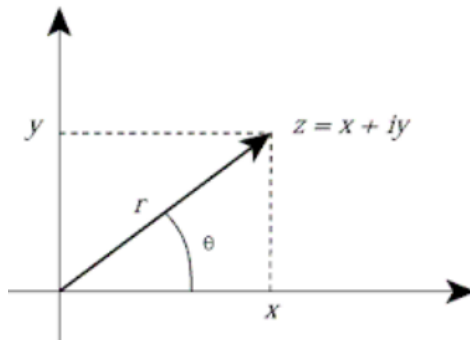
$$x = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$



۳، ۲ مختصات قطبی:

همانطور که دیدیم هر عدد مختلط در حقیقت یک نقطه در فضای \mathbb{R}^2 است. در اینجا هر عدد مختلط را با مختصات (r, θ) نمایش می‌دهیم که مختصات قطبی نام دارد.



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} & \text{قدر مطلق است} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} & \text{را آرگومان } z \text{ می‌نامیم} \end{cases}$$

$$z = x + iy = r \cos \theta + i \sin \theta.$$

مثال ۱۱،۲. اعداد زیر را بر حسب مختصات قطبی بنویسید.

(الف) $z = i \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = 1 \\ \theta = \tan^{-1} \frac{1}{0} = \frac{\pi}{2} \end{matrix}$
 $\Rightarrow z = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

(ب) $z = 1 + i \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = \sqrt{2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \end{matrix}$
 $\Rightarrow z = 1 + i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}.$



۴،۲ تابع نمایی مختلط

تعریف ۱۲،۲. تابع نمایی مختلط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$



تابع نمایی مختلط نیز مانند تابع نمایی حقیقی دارای خاصیت زیر است.

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

همچنین می‌دانیم $-1 = i^2 = -i, i^3 = -1, i^4 = 1, i^5 = -i, \dots$ که در نتیجه اگر $z = x + iy$

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \\ e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \frac{y^5}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots\right) \end{aligned}$$

از ریاضی عمومی ۱ می‌دانیم که $1 - \frac{y^2}{1!} + \frac{y^4}{4!} + \dots$ بسط تیلور تابع $\cos y$ و $y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots$ بسط تیلور تابع $\sin y$ است. در نتیجه $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ و $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

به فرمول $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ فرمول اوایلر گفته می‌شود.

نتیجه ۱۳،۲. هر عدد مختلط را می‌توان به فرم نمایی نمایش داد. دیدیم که اگر $z = (x, y)$ مختصات قطبی θ, r باشد.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

در نتیجه

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

و با توجه به فرمول اوایلر $z = re^{i\theta}$

مثال ۱۴،۲. عدد مختلط $e^{i\pi}$ را بیابید.

(الف) $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$
 $\Rightarrow e^{i\pi} = -1$

(ب) $z = e^{-1+i\frac{\pi}{4}} = e^{-1}e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{-1}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$
 $\Rightarrow z = \frac{i}{e}$



محاسبات اعداد مختلط بر حسب مختصات قطبی:

(الف) $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

(ب) $z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

(ج) $\bar{z} = \overline{(r e^{i\theta})} = r e^{-i\theta}$

(د) $z^{-1} = (r e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$

تمرین ۱۵،۲.

(الف) ضرب دو عدد $1+i$ و $\sqrt{3}-i$ را در مختصات قطبی بنویسید.

(ب) عدد $(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^{\circ}$ را بیابید.

(ج) ریشه‌های معادله $z^4 = 1$ را بیابید.

مختصات قطبی	مختصات حقیقی و موهومی	تعریف
$re^{i\theta}$	$x + iy$	نمایش
$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$	ارتباط
$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} =$ $r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$	$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) =$ $(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$	ضرب
$re^{-i\theta}$	$x - iy$	مزدوج
$\frac{1}{r} e^{-i\theta}$	$\frac{x-iy}{x^2+y^2}$	وارون
r	$ z = \sqrt{x^2 + y^2}$	قدر مطلق
$\frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$	$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{ w ^2}$	تقسیم

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{فرمول اویلر}$$

تمرین ۱۶،۲. محاسبات زیر را انجام دهید. یعنی حاصل را به صورت یک عدد مختلط بنویسید.

(الف) $(5 - 6i) + (3 + 2i)$

(ب) $(4 - \frac{1}{2}i) - (9 + \frac{5}{3}i)$

(ج) $(2 - 5i)(4 - i)$

(د) $(1 - 2i)(8 - 3i)$

(ذ) $\overline{12 + 7i}$

(ر) $\overline{2i(\frac{1}{2} - i)}$

(ز) $\frac{1+4i}{3+2i}$

(ژ) $\frac{3+2i}{1-4i}$

(س) $\frac{1}{1+i}$

(ش) $\frac{3}{4-3i}$

(ص) i^{1999}

(ض) $\sqrt{-25}$

(ط) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

(ظ) $-4i$

(ع) $\frac{1}{2\sqrt{3}-2i}$

(ل) $(1 - \sqrt{3}i)^5$

(غ) $e^{i\frac{\pi}{3}}$

(ف) $e^{2\pi i}$

(ق) $e^{-i\pi}$

(ک) $e^{i+\pi}$

(گ) $(1-i)^8$

(م) $(1+i)^{20}$

۵,۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

فرم کلی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت $F(x, y, y', y'') = 0$ است. اگر بتوانیم y'' را بر حسب x, y و y' بنویسیم به فرم $y'' = f(x, y, y')$ است. مانند معادلات مرتبه اول، در اینجا هم معادلات مرتبه دوم را به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌کنیم.

در مورد حل معادلات مرتبه دوم غیرخطی در حالت‌های خاص در پایان فصل مثال‌هایی حل خواهیم کرد. بنابراین از اینجا به بعد معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم را در نظر می‌گیریم.

۶,۲ حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی

همان طور که می‌دانید فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به شکل زیر است.

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$$

که P, Q, R و G توابعی بر حسب x هستند. به عبارت دیگر اگر طرفین را بر $P(x)$ تقسیم کنیم، معادله به فرم زیر در می‌آید.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x).$$

اگر برای هر x ، $g(x) = 0$ ، معادله را همگن و در غیر این صورت معادله را غیرهمگن می‌نامیم.

در ادامه به حل معادله مرتبه دوم خطی همگن می‌پردازیم. یعنی داریم:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

۷,۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن

در ابتدا در طی چند قضیه و نکته به چگونگی شکل جواب عمومی این دسته از معادلات می‌پردازیم و خواهیم دید که برای یافتن جواب عمومی به چه جواب‌هایی نیاز داریم. قرارداد. برای راحتی طرف چپ معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را با $D[y]$ نمایش می‌دهیم و آن را عملگر دیفرانسیل می‌نامیم. پس معادله به شکل زیر است.

$$D[y] := y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

مثال ۱۷,۲. اگر $p(x) = x^2$ و $q(x) = 1 + x$ باشد. داریم

$$D[y] = y'' + x^2y' + (1 + x)y$$

به عنوان مثال برای $y = \sin x$ داریم:

$$\begin{aligned} D[\sin 3x] &= (\sin 3x)'' + x^2(\sin 3x)' + (1+x)\sin 3x \\ &= -9\sin 3x + 3x^2\cos 3x + (1+x)\sin 3x. \end{aligned}$$



قضیه ۱۸،۲. عملگر D یک عملگر خطی است.

(به عبارت دیگر عملگر D ترکیب خطی چند تابعی را به ترکیب خطی اثر D بر روی تک تک توابع می‌برد).

به عبارت دیگر برای هر دو تابع y_1 و y_2 و مقادیر ثابت c_1 و c_2 داریم

$$D[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1D[y_1] + c_2D[y_2].$$

اثبات. می‌دانیم که $D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$. پس

$$\begin{aligned} D[c_1y_1 + c_2y_2] &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1p(x)y_1' + c_2p(x)y_2' \\ &\quad + c_1q(x)y_1 + c_2q(x)y_2 \\ &= c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) \\ &\quad + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) \\ &= c_1D[y_1] + c_2D[y_2]. \end{aligned}$$



نتیجه ۱۹،۲. اگر y_1 و y_2 جواب معادله $D[y] = 0$ باشند، آنگاه هر ترکیب خطی y_1 و y_2 نیز جواب معادله $D[y] = 0$ است.

اثبات. طبق فرض y_1 و y_2 جواب معادله $D[y] = 0$ است. یعنی $D[y_1] = 0$ و $D[y_2] = 0$.

اما در قضیه قبل دیدیم که

$$\begin{aligned} D[c_1y_1 + c_2y_2] &= c_1D[y_1] + c_2D[y_2] \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0. \quad \text{پس} \end{aligned}$$

یعنی $D[c_1y_1 + c_2y_2]$ و این یعنی $c_1y_1 + c_2y_2$ در معادله صدق می‌کند، یعنی جواب است. ■

تا اینجا به این نتیجه رسیدیم که با داشتن دو جواب از معادله $D[y] = 0$ ، بی‌نهایت جواب به فرم $c_1y_1 + c_2y_2$ برای معادله به دست می‌آید. پس به طور طبیعی این سؤال مطرح می‌شود که آیا این جواب‌ها همه جواب‌های معادله هستند. مجموعه همه جوابها یعنی جواب عمومی A

تعریف ۲، ۲۰. دو جواب y_1 و y_2 از معادله $D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را یک مجموعه اساسی جواب می‌نامیم هرگاه هر جواب از معادله را بتوان به فرم یک ترکیب خطی از y_1 و y_2 نوشت. به عبارت دیگر برای هر جواب y ، مقادیر ثابت c_1 و c_2 وجود داشته باشند به طوری که $y = c_1y_1 + c_2y_2$. ▲

مثال ۲، ۲۱. معادله $D[y] = y'' - y' - 6y = 0$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1 = e^{3x}$ و $y_2 = 2e^{3x}$ به راحتی می‌بینیم که y_1 و y_2 در معادله صدق می‌کنند.

$$D[e^{3x}] = 9e^{3x} - 3e^{3x} - 6e^{3x} = 0$$

$$D[2e^{3x}] = \dots = 0$$

همچنین اگر $y = e^{-2x}$ ، آنگاه $D[e^{-2x}] = 4e^{-2x} + 2e^{-2x} - 6e^{-2x} = 0$ یعنی y هم جواب است. اما هرگز نمی‌توان نوشت $e^{-2x} = c_1e^{3x} + 2c_2e^{3x}$. پس y_1 و y_2 مجموعه اساسی جواب نیست. ▲

سؤال ۲، ۲۲. آیا همیشه یک مجموعه اساسی جواب وجود دارد؟

سؤال ۲، ۲۳. چگونه می‌توان یک مجموعه اساسی جواب پیدا کرد؟

تعریف ۲، ۲۴. اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر بر بازه I باشند. رنسکین f و g را با $W(f, g)$ نمایش می‌دهیم و عبارتست از $fg' - gf'$.

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - gf'$$

▲

۵° معادلات دیفرانسیل

مثال ۲۵,۲. اگر $f = \sin x$ و $g = \cos x$ آنگاه $W(f, g) = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$

▲

قضیه ۲۶,۲. اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $D[y] = 0$ باشند و به ازای یک نقطه $x_0 \in I$ ، $W(y_1, y_2) \neq 0$ آنگاه y_1 و y_2 یک مجموعه اساسی جواب است.

■

اثبات. بدون اثبات.

قضیه ۲۷,۲. اگر توابع $p(x)$ و $q(x)$ در بازه I پیوسته باشند، آنگاه همواره یک مجموعه اساسی جواب برای معادله $D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ وجود دارد.

نتیجه ۲۸,۲. برای حل یک معادله مرتبه دوم خطی همگن کافی است دو جواب آن را پیدا کنیم که رنسکین آنها در یک نقطه ناصفر باشد.

قضیه ۲۹,۲. اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $D[y] = 0$ باشند، آنگاه $W(y_1, y_2)$ روی بازه I یا همه جا صفر است یا هرگز صفر نیست.

اثبات.

$$\begin{aligned} D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y_1 \text{ جواب است} &\Rightarrow (-y_2) \times y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2 \text{ جواب است} &\Rightarrow (y_1) \times y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{aligned} +$$

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0 \quad (۴,۲)$$

اما می‌دانیم که:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ W'(y_1, y_2) &= y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \end{aligned}$$

پس معادله ۴,۲ این است:

$$W'(y_1, y_2) + p(x)W(y_1, y_2) = 0$$

از حل این معادله که یک معادله خطی مرتبه اول است، نتیجه می‌شود

$$W(x) := W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p(x)dx}$$

چون $e^{-\int p(x)dx} \neq 0$ پس $W(x) = 0$ هرگاه $c = 0$ یعنی اگر W در یک نقطه صفر شود، همه جا صفر می‌شود و برعکس اگر در یک نقطه صفر نباشد، در هیچ نقطه‌ای صفر نیست. ■

حال که دیدیم برای یافتن جواب عمومی معادله مرتبه دوم خطی همگن یافتن دو جواب که رنسکین آنها مخالف صفر باشد (مجموعه اساسی جواب) کافی است، در ادامه محکی معرفی کنیم که به راحتی تشخیص دهیم رنسکین دو جواب صفر هست یا نه؟

تعریف ۳۰، ۲. دو تابع f و g را در بازه I وابسته خطی گوییم هرگاه اعداد مثبت c_1 و c_2 وجود داشته باشند که حداقل یکی مخالف صفر باشد و برای هر $x \in I$ داشته باشیم $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$.

به عبارت دیگر در این صورت یکی از توابع ضریبی از دیگری است.

$$f(x) = \frac{c_2}{c_1} g(x)$$

دو تابع f و g را مستقل خطی گوییم، هرگاه وابسته خطی نباشند. یعنی اگر $c_1 = c_2 = 0$ آنگاه $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$. ▲

مثال ۳۱، ۲. اگر $f(x) = e^{3x}$ و $g(x) = 2e^{3x}$ واضح است که $g(x) = 2f(x) - 2f(x) + g(x) = 0$ یا $g(x) = 2f(x)$. پس طبق تعریف f و g وابسته خطی هستند. اما اگر $g_1(x) = e^{2x}$ ، $g_2(x) = e^x \neq c \frac{f(x)}{g_1(x)}$ پس f و g_1 مستقل خطی هستند. ▲

نکته ۳۲، ۲. اگر دو تابع f و g وابسته خطی باشند، آنگاه $W(f, g) = 0$. این مطلب واضح است. زیرا اگر f و g وابسته خطی باشند یعنی یکی ضریبی از دیگری است، مثلاً $f(x) = cg(x)$ پس

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cg & g \\ cg' & g' \end{vmatrix} = cgg' - cgg' = 0$$

قضیه ۳۳، ۲. اگر y_1 و y_2 جواب‌های معادله دیفرانسیل $D[y] = 0$ باشند، آنگاه y_1 و y_2

وابسته خطی است اگر و فقط اگر به ازای یک $x_0 \in I$ ، $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$.



اثبات. بدون اثبات

توجه کنید که قضیه فوق در حقیقت نشان می‌دهد اگر y_1 و y_2 جواب معادله $D[y] = 0$ باشند، آنگاه عکس نکته ۳۲،۲ نیز درست است. در حالی که در حالت کلی چنین نیست. به عنوان مثال به راحتی می‌توانید بررسی کنید که برای دو تابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2|x|$ به ازای هر x داریم $W(f, g) = 0$. اما f و g ضریب ثابتی از یکدیگر نیستند یعنی وابسته خطی نیستند.

نتیجه ۳۴،۲. برای یافتن جواب عمومی معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ کافی است دو جواب مستقل خطی برای معادله بیابیم.

تمرین ۳۵،۲.

(الف) فرض کنید y_1 و y_2 دو جواب معادله $D[y] = 0$ است و $W(y_1, y_2)$ برابر e^{-x^2} آیا y_1 و y_2 مستقل خطی هستند؟

(ب) اگر $y_1 = x^{-\frac{1}{3}}$ ، جواب عمومی معادله را بیابید.

در بخش قبل دیدیم که برای یافتن جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن کافی است دو جواب مستقل خطی برای معادله پیدا کنیم.

حل ۳۶،۲. پاسخ تمرین ۱۵،۲

$y_1 = x^{-\frac{1}{3}}$ جواب معادله $D[y] = 0$ است و y_2 جواب دیگری است از معادله که $W(y_1, y_2) = e^{-x^2}$. جواب عمومی معادله را بیابید. واضح است که کافی است y_2 را پیدا کنیم. چون y_1 و y_2 مستقل خطی است.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{-\frac{1}{3}} & y_2 \\ -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} & y_2' \end{vmatrix} = x^{-\frac{1}{3}}y_2' + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y_2$$

$$W(y_1, y_2) = e^{-x^2} \Rightarrow x^{-\frac{1}{3}}y_2' + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y_2 = e^{-x^2}$$

e^{-x^2} معادله خطی مرتبه اول

$$\begin{aligned} y_1' + \frac{1}{x} x^{-1} y_1 &= x^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} \\ \mu(x) &= e^{\int p(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x \\ x^{\frac{1}{2}} \times \text{معادله} &\Rightarrow x^{\frac{1}{2}} y_1' + \frac{1}{x} x^{-\frac{1}{2}} y_1 = x e^{-x^2} \\ &\Rightarrow \frac{d(x^{\frac{1}{2}} y_1)}{dx} = x e^{-x^2} \\ &\Rightarrow x^{\frac{1}{2}} y_1 = \int x e^{-x^2} dx \\ &\Rightarrow x^{\frac{1}{2}} y_1 = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \\ &\Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2} \end{aligned}$$

جواب عمومی معادله

$$y = c_1 x^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2}.$$

سؤال ۳۷، ۲. چگونه دو جواب مستقل خطی برای معادله $D[y] = 0$ بیابیم؟

۸، ۲ روش کاهش مرتبه

در این روش نشان می‌دهیم با داشتن یک جواب از معادله

$$D[y] = y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \quad (۵، ۲)$$

چگونه یک جواب دیگر مستقل خطی با اولی پیدا کنیم. پس فرض کنید y_1 یک جواب از معادله ۵، ۲ است. جواب دیگر را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که با y_1 وابسته خطی نباشد. پس y_2 نباید ضریبی ثابت از y_1 باشد. برای این منظور قرار می‌دهیم $y_2 = v(x)y_1(x)$ که $v(x)$ یک تابع مجهول غیر ثابت است و کافی است $v(x)$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که y_2 جواب معادله باشد یعنی در معادله صدق کند.

$$\begin{aligned} y_2 = v(x)y_1(x) &\Rightarrow y_2' = v' y_1 + v y_1' \\ &\Rightarrow y_2'' = v'' y_1 + v' y_1' + v' y_1' + v y_1'' \\ D[y_2] &= y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{aligned}$$

با جای‌گذاری y_2, y_2', y_2'' در معادله داریم:

$$\begin{aligned} D[y_2] &= v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'' + p(x)v' y_1 + p(x)v y_1' + q(x)v y_1 = 0 \\ &\Rightarrow v'' y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)v' + (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)v = 0 \\ &\Rightarrow v'' y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)v' = 0 \end{aligned}$$

قرار دهیم $z = v'$ داریم:

$$z' y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)z = 0$$

معادله خطی مرتبه اول است.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow z' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)z = 0 \\ &\Rightarrow v' = z = e^{-\int \left(2\frac{y_1'}{y_1} + p(x)\right)dx} \\ &\Rightarrow v' = e^{-\int \frac{2y_1'}{y_1} dx} e^{-\int p(x)dx} \\ &\Rightarrow v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه $v(x)$ و در نتیجه $y_2 = v y_1$ به دست می‌آید.

مثال ۲، ۳۸.

(الف) نشان دهید $y_1 = x \sec x$ جواب معادله زیر است.

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)y = 0$$

(ب) جواب عمومی معادله را بیابید.

حل:

(الف) تمرین: کافی است y_1 را در معادله جای‌گذاری کنید.

(ب) با استفاده از روش کاهش مرتبه کافی است $v(x)$ را پیدا کنیم و قرار دهیم

پس $v' = \frac{1}{y_1} e^{-\int p(x)dx}$ فرمول داشتیم: برای $v(x)$ فرمول $y_2 = v(x)y_1(x)$

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{1}{x^2 \sec^2 x} e^{-\int (-\frac{1}{x})dx} = \frac{1}{\sec^2 x} \\ \Rightarrow v(x) &= \int \frac{1}{\sec^2 x} dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx \\ \Rightarrow v(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x \\ \Rightarrow y_2 &= (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x)x \sec x \\ \Rightarrow y_2 &= \frac{1}{2}x^2 \sec x + \frac{1}{4}x \sin x \\ \Rightarrow y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \text{جواب عمومی معادله} \\ \Rightarrow y &= c_1 x \sec x + c_2 (\frac{1}{2}x^2 \sec x + \frac{1}{4}x \sin x). \end{aligned}$$



نکته ۳۹، ۲. چند نکته

۱. توجه کنید که در فرمول به دست آمده برای v' یعنی $v' = \frac{1}{y_1} e^{-\int p(x)dx}$ تابعی در معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ است وقتی ضریب y'' برابر یک است. پس حتما برای استفاده از این فرمول ضریب y'' را یک کنیم.

۲. در انتگرال گیری برای به دست آوردن $v(x)$ ، مقدار ثابت مهم نیست، زیرا ما تنها به یک جواب دیگر برای معادله نیاز داریم.

۳. در فرمول v' ، علامت $p(x)$ منفی دارد. با فرمول عامل انتگرال ساز معادلات خطی مرتبه اول که $e^{\int p(x)dx}$ اشتباه نکنیم.

سؤال ۴۰، ۲. برای استفاده از روش کاهش مرتبه جواب y_1 را از کجا پیدا کنیم؟

مثال ۴۱، ۲. معادله $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0$ را حل کنید.
حل: با دقت در ضرایب معادله می توانیم ببینیم که تابع $y_1 = e^x$ در معادله صدق می کند.

$$y_1' = e^x, \quad y_1'' = e^x, \quad e^x(x + 2(1-x) + (x-2)) = 0$$

حالا می توانیم y_2 را با روش کاهش مرتبه پیدا کنیم. قبل از هر چیز معادله را باز نویسی

می‌کنیم که ضریب y'' یک شود. پس داریم

$$y'' + \frac{2}{x}(1-x) + \frac{x-2}{x}y = 0$$

$$y_2 = v(x)y_1, \quad v'(x) = \frac{1}{y_1} e^{-\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} e^{-\int (\frac{2}{x}-2)dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{-1}{x}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{-1}{x} e^x$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 x^{-1} e^x.$$

▲

مثال ۴۲،۲. معادله $x^2(x+2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ را حل کنید.
 حل: با دقت در ضرایب معادله می‌توانیم حدس بزنیم که $y_1 = x$ در معادله صدق می‌کند.
 حال $y_2 = vx$ که

$$v' = \frac{1}{y_1} e^{-\int p(x)dx} \quad (1 = y'' \text{ وقتی ضریب } y'' \text{ را } 1 \text{ می‌کنیم})$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{2}{x(x+2)}y' - \frac{2}{x^2(x+2)}y = 0$$

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{2}{x^2(x+2)}dx}$$

انتگرال $\int \frac{-2}{x(x+2)}dx$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$\int \frac{-2}{x(x+2)}dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{(x+2)}dx = -\ln x + \ln(x+2) = \ln \frac{x+2}{x}$$

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x+2}{x}dx} = \frac{x+2}{x^3} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{-1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y_2 = \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)x$$

$$\Rightarrow y_2 = \left(-1 - \frac{1}{x}\right)x$$

$$\Rightarrow y = c_1 x + c_2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$



نکته ۴۳،۲. در معادله $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$

(الف) اگر $P(x) + Q(x) + R(x) = 0$ ، آنگاه $y_1 = e^x$ یک جواب است.

(ب) اگر $P(x) - Q(x) + R(x) = 0$ ، آنگاه $y_1 = e^{-x}$ یک جواب است.

(ج) اگر $Q(x) + xR(x) = 0$ ، آنگاه $y_1 = x$ یک جواب است.

تمرین ۴۴،۲. معادلات زیر را حل کنید. (با استفاده از روش کاهش مرتبه)

(الف) $2xy'' + (1 - 4x)y' + (2x - 1)y = 0$

(ب) $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ $y(0) = 3$
 $y'(0) = -4$

(ج) $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$

(د) $xy'' + 2y' + xy = 0$ ، $y_1 = \frac{\sin x}{x}$

(ه) $x^2y'' - xy' + y = 0$

(و) $xy'' - y' + x^2y = 0$ ، $y_1 = \cos \frac{x}{\sqrt{x}}$

۹،۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب ثابت به صورت زیر است.

$$D[y] = ay'' + by' + cy = 0 \quad (۶،۲)$$

که a ، b و c اعداد حقیقی ثابت هستند.

می‌دانیم که برای حل چنین معادلاتی به دو جواب مستقل خطی نیاز داریم. همچنین می‌دانیم که با داشتن یک جواب از معادله، می‌توانیم با استفاده از روش کاهش مرتبه

جواب دوم را نیز به دست آوریم. پس سعی می‌کنیم جوابی از معادله را حدس بزنیم. با توجه به اینکه از شکل معادله پیدا است، جواب معادله باید به فرمی باشد که مشتقات آن در مقادیر ثابت اختلاف دارند. از طرفی می‌دانیم تابع نمایی دارای این خاصیت است. بنابراین سعی می‌کنیم تابع $y = e^{rx}$ ، r مقدار مجهول را به گونه‌ای تعیین کنیم که جواب معادله ۶,۲ باشد. یعنی باید $y = e^{rx}$ در معادله صدق کند.

$$\begin{aligned} y = e^{rx} &\Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rx} \\ &\Rightarrow D[y] = ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \end{aligned}$$

پس باید: $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ اما $e^{rx} \neq 0$ ، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$ar^2 + br + c = 0$$

نتیجه ۴۵,۲. اگر r ریشه معادله $ar^2 + br + c = 0$ باشد، آنگاه تابع $y = e^{rx}$ جواب معادله $ay'' + by' + cy = 0$ است.

تعریف ۴۶,۲. به معادله $ar^2 + br + c = 0$ معادله شاخص معادله‌ی $ay'' + by' + cy = 0$ می‌گوییم. ▲

از آن جایی که معادله شاخص یک معادله درجه دوم است که باید ریشه‌های آن را به دست آوریم، باید حالت‌های مختلف برای ریشه‌های یک معادله درجه دوم را بررسی کنیم. به یاد داریم که ریشه‌های معادله درجه دوم $ar^2 + br + c = 0$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} r &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Delta &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

حالت اول. $\Delta > 0$.

در این صورت ریشه‌های معادله، دو ریشه حقیقی متمایز هستند، مثلاً r_1 و r_2 .

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

در نتیجه با توجه به مطالب گفته شده در بالا جواب‌های معادله به صورت $y_1 = e^{r_1 x}$ و $y_2 = e^{r_2 x}$ است و چون $r_1 \neq r_2$ ، y_1 و y_2 مستقل خطی هستند. بنابراین در این حالت، جواب عمومی معادله به صورت زیر است.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

مثال ۲، ۴۷. جواب عمومی معادله $y'' - y' - 6y = 0$ را بیابید.
حل: ابتدا معادله شاخص را تشکیل می‌دهیم.

$$r^2 - r - 6 = 0$$

سپس ریشه‌های این معادله را پیدا می‌کنیم.

$$r = \frac{+1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\Rightarrow r_1 = 3, r_2 = -2$$

به ازای هر ریشه یک جواب به دست می‌آید. پس

$$y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{-2x}$$

▲ و در نهایت جواب عمومی معادله $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$ است.

تمرین ۲، ۴۸. جواب عمومی معادله $y'' - y = 0$ را بیابید.

تمرین ۲، ۴۹. جواب عمومی معادله $y'' - 4y' - 5 = 0$ را بیابید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0. \text{ حالت دوم.}$$

اگر $\Delta = 0$ ، آنگاه معادله شاخص $ar^2 + br + c = 0$ دارای یک ریشه مضاعف حقیقی است و داریم $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$. در نتیجه تنها یک جواب $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}$ برای معادله $ay'' + by' + cy = 0$ به دست می‌آید. حالا برای یافتن جواب دوم از روش کاهش مرتبه

استفاده می‌کنیم. پس قرار می‌دهیم $y_2 = v(x)e^{-\frac{b}{a}x}$ که

$$v'(x) = \frac{1}{y_1} e^{-\int p(x)dx} = \frac{1}{e^{-\frac{b}{a}x}} e^{-\int \frac{b}{a}dx}$$

$$\Rightarrow v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$\Rightarrow y_2 = xe^{-\frac{b}{a}x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله در این حالت به فرم $y = c_1 e^{-\frac{b}{a}x} + c_2 x e^{-\frac{b}{a}x}$ است.

مثال ۵۰، ۲. معادله $4y'' - 12y' + 9y = 0$ را حل کنید.

حل: معادله شاخص را تشکیل می‌دهیم:

$$4r^2 - 12r + 9 = 0$$

ریشه‌های معادله شاخص را پیدا می‌کنیم:

$$r = \frac{12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \times 4 \times 9}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{\frac{3}{2}x}$$



مثال ۵۱، ۲. معادله $y'' - 2y' + y = 0$ ، $y(2) = 1$ و $y'(2) = -1$ را حل کنید.

حل: معادله شاخص $r^2 - 2r + 1 = 0$

$$\Rightarrow (r - 1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

در این مساله چون شرایط اولیه داده شده باید در نقطه $x = 2$ ، $y(2)$ و $y'(2)$ را حساب کنیم و ضرایب ثابت c_1 و c_2 را به دست آوریم.

حالا برای اینکه محاسبات کوتاه‌تر شود می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم که اثبات آن را به عنوان تمرین ساده به شما واگذار می‌کنیم.



نکته ۵۲، ۲. اگر r ریشه مضاعف معادله شاخص $ay'' + by' + cy = 0$ باشد، آنگاه برای

هر نقطه x_0 ، $y_1 = e^{r(x-x_0)}$ و $y_2 = (x - x_0)e^{r(x-x_0)}$ نیز جواب‌های معادله هستند.

در نتیجه در این مثال می‌توانیم جواب عمومی را به فرم

$$y = c_1 e^{(x-2)} + c_2 (x-2) e^{(x-2)}$$

بنویسیم که محاسبه c_1 و c_2 را آسان‌تر می‌کند.

$$y(2) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$y'(2) = -1 \Rightarrow y' = c_1 e^{(x-2)} + c_2 e^{(x-2)} + c_2 (x-2) e^{(x-2)}$$

$$y'(2) = c_1 + c_2 = -1$$

$$\Rightarrow c_2 = -2$$

$$\Rightarrow y = e^{(x-2)} - 2(x-2)e^{(x-2)} = e^{(x-2)}(5 - 2x).$$

حالت سوم. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

در این حالت معادله شاخص ریشه حقیقی ندارد. در این حالت ریشه‌های معادله دو جواب مختلط هستند که مزدوج یکدیگرند.

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-(-\Delta)}}{2a}$$

$$\Rightarrow r = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

برای راحتی قرار می‌دهیم $\mu := \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $\lambda := \frac{-b}{2a}$. پس می‌توان گفت جواب معادله شاخص به صورت $r = \lambda \pm i\mu$ است. اما قبلاً دیدیم که اگر r ریشه معادله شاخص باشد، آنگاه $y = e^{rx}$ جواب معادله $ay'' + by' + cy = 0$ است. حالا سعی می‌کنیم تابع $y = e^{rx}$ را به صورت تابعی با قسمت حقیقی و قسمت موهومی مشخص بنویسیم.

$$y = e^{rx} = e^{(\lambda \pm i\mu)x} = e^{\lambda x \pm i\mu x}$$

$$\Rightarrow y = e^{\lambda x} e^{\pm i\mu x} = e^{\lambda x} (\cos \mu x \pm i \sin \mu x)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ فرمول اویلر}$$

پس دو جواب مختلط برای معادله به صورت $y_1 = e^{\lambda x} (\cos \mu x + i \sin \mu x)$ و $y_2 = e^{\lambda x} (\cos \mu x - i \sin \mu x)$ پیدا کردیم.

اما چون مقادیر a ، b و c در معادله $ay'' + by' + cy = 0$ حقیقی هستند به دنبال

جواب‌های حقیقی معادله هستیم.

قضیه زیر برای رسیدن به این هدف به ما کمک می‌کند.

قضیه ۵۳،۲. اگر تابع $y = f(x) + ig(x)$ جواب معادله دیفرانسیل خطی $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد، که $p(x)$ و $q(x)$ توابع حقیقی هستند، آنگاه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ نیز جواب‌های حقیقی معادله هستند.

اثبات. قبلاً دیدیم که عملگر $D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ یک عملگر خطی است. در نتیجه داریم

$$D[y] = D[f(x) + ig(x)] = D[f(x)] + iD[g(x)] = 0 \\ \Rightarrow D[f(x)] = 0, D[g(x)] = 0$$

یعنی $f(x)$ و $g(x)$ جواب‌های معادله هستند. ■

نتیجه ۵۴،۲. در معادله $ay'' + by' + cy = 0$ در حالتی که $\Delta < 0$ و جواب معادله $y = e^{\lambda x} \cos \mu x + e^{\lambda x} \sin \mu x$ ($\lambda = \frac{-b}{2a}, \mu = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$) است، دو جواب مستقل خطی حقیقی معادله $y_1 = e^{\lambda x} \cos \mu x$ و $y_2 = e^{\lambda x} \sin \mu x$ هستند و جواب عمومی معادله عبارتست از

$$y = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x$$

مثال ۵۵،۲. جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

$$y'' + 4y = 0 \quad .1$$

ابتدا معادله شاخص را می‌نویسیم $r^2 + 4 = 0$. سپس ریشه‌های معادله شاخص را پیدا می‌کنیم.

$$r^2 = -4 \Rightarrow r = \pm 2i$$

برای یافتن جواب عمومی کافی است یک جواب مختلط در نظر بگیریم.

$$y = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x \quad \text{فرمول اویلر} \\ \Rightarrow y_1 = \cos 2x, y_2 = \sin 2x \quad \text{نتیجه قبل} \\ \Rightarrow y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad \text{جواب عمومی}$$

$$y'' - 3y' + 4y = 0 \quad ۲. \\ \text{مانند مراحل بالا}$$

$$r^2 - 3r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} \\ \Rightarrow r = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y = e^{(\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2})x}$$

$$y = e^{(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2})x} = e^{\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + ie^{\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x \\ \Rightarrow y_1 = e^{\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x, y_2 = e^{\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x \quad \text{دو جواب حقیقی} \\ \Rightarrow y = c_1 e^{\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 e^{\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{7}}{2}x \quad \text{جواب عمومی}$$



تمرین ۵۶,۲. جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

(الف) $y'' + y' + y = 0$

(ب) $y'' - y' + y = 0$

(ج) $2y'' + 3y' + 4y = 0$

(د) $y'' + 2y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1 \\ y'(0) = -1$

۱۰,۲ معادلات اوایلر

حال که توانستیم جواب عمومی معادلات همگن با ضرایب ثابت را پیدا کنیم، سعی می‌کنیم دسته‌ای از معادلات مرتبه دوم خطی دیگر را با تغییر متغیر مناسب به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل کنیم. دسته‌ای از معادلات که اینکار را می‌توان به راحتی انجام داد، معادلاتی به فرم

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0 \quad (۷,۲)$$

است که $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ثابت است. این معادلات را معادله اوایلر می‌نامیم. پس فرض می‌کنیم معادله اوایلر $x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$ داده شده است. تغییر متغیر $z := \ln x \equiv x = e^z$

را اعمال می‌کنیم.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

برای جای‌گذاری در معادله باید مشتق y را بر حسب z به دست آوریم.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x} \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx dz} \cdot \frac{1}{x} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{d^2y}{dz dx} \cdot \frac{1}{x} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{x} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

حال در معادله ۷,۲ همه چیز را بر حسب متغیر جدید z جای‌گذاری می‌کنیم.

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = x^2 \left[\frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x^2} \right]$$

$$+ \alpha x \left[\frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x} \right] + \beta y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{dz} + \beta y = 0$$

می‌بینیم که معادله جدید یک معادله درجه دوم همگن با ضرایب ثابت است که می‌دانیم چگونه دو جواب مستقل خطی و در نتیجه جواب عمومی آن را بیابیم.

مثال ۵۷,۲. جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید.

$$x^2 y'' - x y' + y = 0$$

با توجه به شکل معادله می‌بینیم که این معادله یک معادله اویلر با $\alpha = -1$ و $\beta = 1$

است. همچنین دیدیم که با اعمال تغییر متغیر $z = \ln x \Leftrightarrow e^z = x$ معادله به فرم

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{dz} + \beta y = 0$$

یعنی به صورت $\frac{d^2 y}{dz^2} - 2 \frac{dy}{dz} + \beta y = 0$ است. معادله شاخص این معادله $r^2 - 2r + 1 = 0$ است. پس $r = 1$ ریشه مضاعف معادله شاخص و طبق آنچه قبلاً دیدیم جواب عمومی معادله $y = c_1 e^z + c_2 z e^z = c_1 x + c_2 x \ln x$ است. ▲

مثال ۵۸،۲. جواب عمومی معادله $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$ را بیابید. معادله اویلر است و $\alpha = -1$ و $\beta = 2$. تغییر متغیر $z = \ln x \Leftrightarrow x = e^z$ معادله را به فرم زیر تبدیل می‌کند.

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{dz} + \beta y = \frac{d^2 y}{dz^2} - 2 \frac{dy}{dz} + 2y = 0 \quad (۸,۲)$$

معادله شاخص $r^2 - 2r + 2 = 0$ ریشه‌های معادله شاخص $r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$ است. جواب معادله ۸،۲

$$y = e^{(1+i)z} = e^z \cos z + i e^z \sin z \\ \Rightarrow y_1 = e^z \cos z, y_2 = e^z \sin z$$

با جای‌گذاری متغیر اول یعنی $x = e^z$ داریم:

$$\Rightarrow y_1 = x \cos(\ln x), y_2 = x \sin(\ln x) \\ \Rightarrow y = c_1 x \cos(\ln x) + c_2 x \sin(\ln x) \quad \text{جواب عمومی}$$

▲

تمرین ۵۹،۲. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

(ب) $x^2 y'' - 2y = 0$

(ج) $y'' - \frac{6}{x^2} = 0$

(د) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$

(ذ) $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$

(ر) $x^2y'' + 2xy' + 2y = 0$

(ز) $x^2y'' + y = 0$

(دقت کنید که α و β در فرمول هنگامی است که ضریب y'' برابر $1x^2y''$ است.)

۱۱,۲ تغییر متغیر

دیدیم که معادلاتی با ضرایب غیر ثابت مانند معادلات اوایلر با تغییر متغیر مناسبی به معادله با ضرایب ثابت تبدیل شد.

این کار ممکن است برای معادلات درجه دوم خطی دیگری هم با یک تغییر متغیر مناسب ممکن باشد.

نکته مهم در این تغییر متغیر اولاً تشخیص تغییر متغیر مناسب و ثانیاً محاسبه درست مشتق y یعنی y' و y'' نسبت به متغیر جدید، با استفاده از قاعده زنجیره‌ای است.

مثال ۶۰,۲. با استفاده از تغییر متغیر داده شده، معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + (e^x - 1)y' + e^{2x}y = 0, \quad z = e^x$$

حل:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot e^x \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} \cdot e^x + \frac{dy}{dz} \cdot e^x \\ &= \frac{d^2y}{dz^2} \cdot e^x + \frac{dy}{dz} \cdot e^x \\ &= \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot e^x + \frac{dy}{dz} \cdot e^x \Rightarrow \\ y'' &= \frac{d^2y}{dz^2} \cdot e^{2x} + \frac{dy}{dz} \cdot e^x \end{aligned}$$

y' و y'' را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} y'' + (e^x - 1)y' + e^{2x}y &= \frac{d^2y}{dz^2}e^{2x} + \frac{dy}{dz}e^x \\ &+ (e^x - 1)\frac{dy}{dz} + e^{2x}y = 0 \\ \Rightarrow e^{2x}\frac{d^2y}{dz^2} + e^{2x}\frac{dy}{dz} + e^{2x}y &= 0 \\ e^{2x} \neq 0 &\Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + y = 0 \end{aligned}$$

معادله شاخص $r^2 + r + 1 = 0$ ریشه‌های معادله شاخص $r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= e^{rz} = e^{(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z} \\ \text{جواب مختلط} \Rightarrow y &= e^{-\frac{1}{2}z} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}z + ie^{-\frac{1}{2}z} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}z \\ \text{دو جواب حقیقی} \Rightarrow y_1 &= e^{-\frac{1}{2}z} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}z, y_2 = e^{-\frac{1}{2}z} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}z \\ \text{جواب عمومی} \Rightarrow y &= c_1 e^{-\frac{1}{2}z} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}z + c_2 e^{-\frac{1}{2}z} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}z \\ z = e^x &\Rightarrow y = c_1 e^{-\frac{1}{2}e^x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}e^x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}e^x \end{aligned}$$



تمرین ۲، ۶۱. معادله $2xy'' + (1-x^{\frac{1}{2}})y' - 3y = 0$ را با تغییر متغیر $z = x^{\frac{1}{2}}$ حل کنید.
حل:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ y'' &= \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dz} \right] \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{dy}{dz} \times \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right] \\ y'' &= \frac{d}{dz} \left[\frac{dy}{dz} \right] \times \frac{dz}{dx} \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{dy}{dz} \times \left[-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \right] \\ y'' &= \frac{d^2y}{dz^2} \times \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \frac{dy}{dz} \\ y'' &= \frac{1}{2}x^{-1} \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \frac{dy}{dz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2xy'' + (1 - x^{\frac{1}{2}})y' - 3y = 0 \\
 & 2x\left[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dz} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\frac{dy}{dz}\right] + (1 - x^{\frac{1}{2}})\left[\frac{dy}{dz} \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right] = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{1}{2}\frac{dy}{dz} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dz} - 3y = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{1}{2}\frac{dy}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dz} - 3y = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{dy}{dz} - \frac{dy}{dz} - 6y = 0 \\
 \Rightarrow & r^2 - r - 6 = 0 \Rightarrow (r - 3)(r + 2) = 0 \\
 \Rightarrow & r_1 = 3, \quad r_2 = -2 \\
 \Rightarrow & y_1 = e^{3z}, \quad y_2 = e^{-2z} \\
 \Rightarrow & y = c_1 e^{3z} + c_2 e^{-2z} \\
 \Rightarrow & y = c_1 e^{3x^{\frac{1}{2}}} + c_2 e^{-2x^{\frac{1}{2}}}. \quad z = x^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

۱۲,۲ حل معادلات مرتبه دوم خطی غیر همگن

فرم جواب معادلات مرتبه دوم خطی غیر همگن:
 شکل کلی یک معادله مرتبه دوم خطی غیر همگن به صورت زیر است.

$$D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad (9,2)$$

معادله همگن نظیر معادله ۹,۲ یعنی معادله

$$D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (10,2)$$

تا اینجا دیدیم که برای حل معادله ۱۰,۲ باید دو جواب مستقل خطی برای این معادله پیدا کنیم و برای این کار نشان دادیم که با داشتن یک جواب، جواب مستقل خطی دوم به روش کاهش مرتبه به دست می‌آید. در غیر این صورت هنگامی که ضرایب ثابت باشند می‌توانیم دو جواب مستقل خطی برای معادله پیدا کنیم.
 در اینجا ابتدا بررسی می‌کنیم که جواب‌های معادله ۹,۲ به چه شکلی هستند و سپس به بیان روش‌های یافتن آنها می‌پردازیم.

قضیه ۶۲,۲. اگر دو تابع $f(x)$ و $h(x)$ جواب معادله ۹,۲ باشند، آنگاه تابع $f(x) - h(x)$ جواب معادله ۱۰,۲ است.

اثبات. طبق فرض $f(x)$ و $h(x)$ جواب معادله ۹,۲ هستند، پس $D[f(x)] = g(x)$ و $D[h(x)] = g(x)$ اما D عملگر خطی است. در نتیجه

$$D[f(x) - h(x)] = D[f(x)] - D[h(x)] = g(x) - g(x)$$

بنابراین $D[f(x) - h(x)] = 0$ ، یعنی $f(x) - h(x)$ جواب ۱۰,۲ است. ■

قضیه ۶۳,۲. اگر y_p یک جواب از معادله غیر همگن ۹,۲ باشد و y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی از معادله همگن ۱۰,۲ باشند، آنگاه جواب عمومی معادله ۹,۲ به صورت $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$ است.

اثبات. چون طبق فرض y_p یک جواب از معادله ۹,۲ است، $D[y_p] = g$ همچنین برای هر جواب y از معادله ۹,۲ داریم $D[y] = g$. در قضیه ۶۲,۲، نشان دادیم که تفاضل هر دو جواب از معادله غیر همگن، جوابی از معادله همگن نظیر آن است. یعنی $y - y_p$ جواب معادله ۱۰,۲ است. اما از قبل می‌دانیم که هر جواب از معادله ۱۰,۲ ترکیب خطی y_1 و y_2 است. پس $y - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$. در نتیجه

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

■

نتیجه ۶۴,۲.

یک جواب از معادله جواب عمومی معادله جواب عمومی معادله
خطی غیر همگن + خطی همگن نظیر = خطی غیر همگن

نتیجه ۶۵,۲. برای یافتن جواب عمومی معادله مرتبه دوم خطی غیر همگن کافی است:

۱. دو جواب مستقل خطی برای معادله همگن نظیر آن پیدا کنیم.

۲. یک جواب خاص برای معادله غیر همگن بیابیم.

۱۳,۲ روش تغییر پارامتر

در این روش با داشتن دو جواب مستقل خطی از معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ یک جواب خاص برای معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ پیدا می‌کنیم. در این روش که روش تغییر پارامتر نام دارد، فرض می‌کنیم y_1 و y_2 دو جواب از معادله همگن $D[y] = 0$ باشند و توابع مجهول $u_1(x)$ و $u_2(x)$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ جواب معادله $D[y] = g$ باشد.

پس می‌دانیم که $D[y_1] = 0$, $D[y_2] = 0$ و می‌خواهیم u_1, u_2 را طوری پیدا کنیم که $D[u_1y_1 + u_2y_2] = g(x)$.

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ y_p' &= u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \end{aligned}$$

برای راحتی u_1, u_2 را طوری پیدا می‌کنیم که (شرط را اضافه کردیم)

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 \quad (1) \Rightarrow \\ y_p' &= u_1y_1' + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

حال y_p را در معادله قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} D[y_p] &= u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \\ &+ p(x)(u_1y_1' + u_2y_2') + q(x)(u_1y_1 + u_2y_2) = g(x) \\ u_1 [y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] &+ u_2 [y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\ &+ u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \\ \Rightarrow u_1'y_1' + u_2'y_2' &= g(x) \quad (2) \end{aligned}$$

پس برای اینکه $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ جواب معادله $D[y] = g(x)$ باشد، باید u_1, u_2 در دو رابطه زیر صدق کند.

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \end{cases}$$

از این دستگاه دو معادله دو مجهول (u_1, u_2) را به دست می‌آوریم. طبق روش کرامر داریم:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} \circ & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \circ \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

توجه: در این فرمول $g(x)$ وقتی است که ضریب y'' یک باشد. با انتگرال گیری از دو طرف رابطه بالا، u_1, u_2 و در نتیجه $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ به دست می‌آید.

مثال ۶۶، ۲. جواب عمومی معادله $(1 + e^{-2x})^{-1} y'' - 3y' + 2y = 0$ را بیابید.
حل: طبق آنچه گفته شد ابتدا باید جواب عمومی معادله همگن نظیر یعنی معادله $y'' - 3y' + 2y = 0$ را پیدا کنیم.

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r - 2)(r - 1) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 2, \quad r_2 = 1$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^x$$

$$\Rightarrow \text{جواب عمومی معادله همگن} = y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^x.$$

قدم بعد یافتن y_p با استفاده از روش تغییر پارامتر است. قرار می‌دهیم $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ را با استفاده از فرمول‌های گفته شده پیدا می‌کنیم.

$$u_1' = \frac{-y_2 g(x)}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2' = \frac{y_1 g(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = -e^{3x}$$

$$\begin{aligned}
 u_1' &= \frac{-(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}} e^x}{-e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x} \sqrt{1+e^{-2x}}} \\
 u_2' &= \frac{(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}} e^{2x}}{-e^{2x}} = \frac{-1}{e^x \sqrt{1+e^{-2x}}} \\
 \Rightarrow u_1 &= \int \frac{dx}{e^{2x} \sqrt{1+e^{-2x}}} = \int \frac{-dt}{2\sqrt{t}} = -\sqrt{t} \\
 1 + e^{-2x} &= t \Rightarrow -2e^{-2x} dx = dt \\
 \Rightarrow u_1 &= -\sqrt{1+e^{-2x}} \\
 \Rightarrow u_2 &= \int \frac{-dx}{e^x \sqrt{1+e^{-2x}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \sinh^{-1} t \\
 e^{-x} &= t \Rightarrow -e^{-x} dx = dt \\
 \Rightarrow u_2 &= \sinh^{-1} e^{-x} \\
 \Rightarrow y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 = -\sqrt{1+e^{-2x}} e^{2x} + (\sinh^{-1} e^{-x}) e^x
 \end{aligned}$$

جواب عمومی معادله

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^x - \sqrt{1+e^{-2x}} e^{2x} + (\sinh^{-1} e^{-x}) e^x.$$



تمرین ۶۷،۲. جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

(الف) $2xy'' + (1-4x)y' + (2x-1)y = e^x$

(ب) $x^2 y'' + 7xy' + 5y = 12x$

۱۴،۲ روش ضرایب نامعین

برای یافتن یک جواب خاص از معادله غیر همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ وقتی تابع $g(x)$ شکل خاصی داشته باشد با روش‌های ساده‌تر از روش تغییر پارامتر می‌توان y_p را پیدا کرد.

مثال ۶۸،۲. معادله $y'' + y = x^2$ را در نظر بگیرید. برای حل این معادله بعد از یافتن جواب عمومی معادله همگن $y'' + y = 0$ ، نیاز به یک جواب خاص از معادله $y'' + y = x^2$ داریم. در اینجا که $g(x)$ چند جمله‌ای x^2 است، می‌توانیم بفهمیم که جواب معادله نیز می‌تواند به فرم چند جمله‌ای باشد و با توجه به شکل معادله جواب نیز باید

درجه دو باشد. پس جواب y_p را به فرم چند جمله‌ای درجه دو $y_p = Ax^2 + Bx + C$ می‌نویسیم و A ، B و C را طوری پیدا می‌کنیم که y_p در معادله صدق کند.

$$y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A$$

$$y_p'' + y_p = 2A + Ax^2 + Bx + C = Ax^2 + Bx + (2A + C) \stackrel{?}{=} x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = 0 \Rightarrow C = -2 \end{cases} \Rightarrow y_p = x^2 - 2$$

جواب خاص $x^2 - 2$



مثال ۶۹، ۲. معادله $y'' + 3y' + 2y = 4xe^x$ را در نظر بگیرید. برای پیدا کردن جواب خاص این معادله نیز می‌توانیم حدس بزنیم که جواب باید یک چند جمله‌ای درجه اول باشد. همچنین باید شامل e^x هم باشد. پس قرار می‌دهیم $y_p = e^x(Ax + B)$ و سعی می‌کنیم A و B را طوری پیدا کنیم که y_p در معادله صدق کند.

$$y_p = e^x(Ax + B)$$

$$y_p' = e^x(Ax + B) + Ae^x = Axe^x + (A + B)e^x$$

$$y_p'' = Ae^x + Axe^x + (A + B)e^x$$

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = Ae^x + Axe^x + (A + B)e^x + 3(Axe^x + (A + B)e^x) + 2e^x(Ax + B) = 4xe^x$$

$$\Rightarrow e^x [6Ax + (5A + 6B)] = 4xe^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6A = 4 \Rightarrow A = \frac{2}{3} \\ 5A + 6B = 0 \Rightarrow B = -\frac{5}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = e^x \left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{9} \right).$$



مثال ۷۰، ۲. حال معادله $y'' - y = e^x$ را در نظر بگیرید. در این معادله هم حدس می‌زنیم جواب به فرم ضربی از e^x باشد و $y_p = Ae^x$ را امتحان می‌کنیم. پس داریم

$$y_p' = Ae^x, \quad y_p'' = Ae^x \Rightarrow y_p'' - y_p = Ae^x - Ae^x = 0 \neq e^x$$

پس جوابی به فرم Ae^x در معادله صدق نمی‌کند. حال اگر قرار دهیم $y_p = Axe^x$ و این تابع را امتحان کنیم خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} y_p &= Axe^x \\ y_p' &= Ae^x + Axe^x \\ y_p'' &= Ae^x + Ae^x + Axe^x \\ y_p'' - y_p &= 2Ae^x + Axe^x - Axe^x \stackrel{?}{=} e^x \\ \Rightarrow 2A &= 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p = \frac{1}{2}xe^x \end{aligned}$$

دلیل این موضوع این است که $r = 1$ ریشه معادله شاخص $r^2 - 1 = 0$ است و در e^{1x} ، ضریب x هم یک است. توجه کنید اگر $r = 1$ ریشه معادله شاخص نبود مثلاً معادله به فرم $y'' + y = e^x$ بود، $y_p = Ae^x$ جواب بود. ▲

قضیه ۲، ۷۱. برای معادله مرتبه دوم خطی غیر همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ اگر تابع $g(x)$ به صورت $g(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \sin \beta x$ یا $g(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \cos \beta x$ باشد، که $p_n(x)$ یک چند جمله‌ای مرتبه n است. آنگاه معادله دارای یک جواب خاص به صورت زیر است.

$$y_p = x^s e^{\alpha x} [\cos \beta x (A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0) + \sin \beta x (B_n x^n + \dots + B_1 x + B_0)]$$

که در این فرمول s به صورت زیر تعیین می‌شود.

۱. اگر $\alpha + i\beta$ ریشه معادله شاخص نباشد، آنگاه $s = 0$.
۲. اگر $\alpha + i\beta$ ریشه معادله شاخص باشد، آنگاه $s = 1$.
۳. اگر $\alpha = 0$ و $\beta = 0$ ریشه مضاعف معادله شاخص باشد، آنگاه $s = 2$.

نتیجه ۲، ۷۲. برای یافتن y_p در معادله غیر همگن با $g(x)$ به یکی از فرم‌های بالا، y_p را در فرم کلی مطابق با شرایط قضیه می‌نویسیم و فقط برای تعیین ضرایب A_i ها و B_i ها کافی است y_p را در معادله قرار دهیم و ضرایب را به دست آوریم.

نتیجه ۲، ۷۳.

(الف) اگر $g(x) = p_n(x)$ ، آنگاه $y_p = x^s(A_0x^n + \dots + A_n)$ که s برابر تکرار مقدار صفر به عنوان ریشه معادله شاخص است.

(ب) اگر $g(x) = p_n(x)e^{\alpha x}$ ، آنگاه $y_p = x^s e^{\alpha x}(A_0x^n + \dots + A_n)$ که s برابر تکرار مقدار α به عنوان ریشه معادله شاخص است.

تمرین ۲، ۷۴. فرم کلی یک جواب خاص از معادلات زیر را بنویسید (محاسبه ضرایب لازم نیست).

(الف) $y'' + 9y = 36x \cos 3x + 2e^x \sinh x$

(ب) $y'' - 2y' + 3y = x^3 + e^x \cos 2x + (\sin \sqrt{2}x) \sinh x$

(ج) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin^2 \frac{x}{2} \cosh 2x$

(د) $y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x} \sin^2 x$

(س) $y'' - 2y' + 5y = 2x^2 e^x \cos^2 x + 1$

مثال ۲، ۷۵. فرم کلی یک جواب خاص برای معادلات غیر همگن زیر را بنویسید. (محاسبه ضرایب لازم نیست).

(الف) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 1$

$$\alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow \alpha + i\beta = 0$$

$$2r^2 + 3r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$\Rightarrow r_1 = -1, r_2 = -\frac{1}{2}$$

در نتیجه $\alpha + i\beta = 0$ ریشه معادله شاخص نیست پس $s = 0$.

$$y_p = x^s e^{\alpha x} [\cos \beta x p_n(x) + \sin \beta x q_n(x)], \quad n = 2$$

$$\Rightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$(ب) \quad y'' + y' = x^2$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0 \Rightarrow \alpha + i\beta = 0$$

$$r^2 + r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, \quad r_2 = -1 \Rightarrow \text{صفر ریشه معادله شاخص}$$

$$y_p = x(A_0 x^2 + A_1 x + A_2).$$

$$(ج) \quad y'' + 3y' + 2y = 4xe^x$$

$$2r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, \quad r_2 = -2$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \text{ریشه معادله شاخص نیست} \Rightarrow s = 0$$

$$\Rightarrow y_p = e^x(A_0 x + A_1).$$

$$(د) \quad y'' + 2y' + 5y = x^2 e^{-x} \cos 2x$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2 \Rightarrow \alpha + i\beta = -1 + 2i$$

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$$

$$\Rightarrow r = -1 \pm 2i \Rightarrow \text{ریشه معادله شاخص هست}$$

$$\Rightarrow s = 1$$

$$\Rightarrow y_p = xe^{-x} [\cos 2x(A_0 x^2 + A_1 x + A_2) + \sin 2x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2)].$$

$$(ه) \quad y'' - y = 1 + \cosh x$$

$$y'' - y = 1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y'' - y = 1 \Rightarrow y_{p1} = x^s A = A \quad s = 0 \Leftarrow \text{صفر ریشه معادله شاخص نیست}$$

$$y'' - y = \frac{1}{2} e^x \Rightarrow y_{p2} = Bx e^x \quad s = 1 \Leftarrow \text{یک ریشه معادله شاخص است}$$

$$y'' - y = \frac{1}{2} e^{-x} \Rightarrow y_{p3} = Cx e^{-x} \quad s = 1 \Leftarrow \text{منفی یک ریشه معادله شاخص}$$

$$\text{معادله شاخص} \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 1$$

$$\Rightarrow y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} = A + Bx e^x + Cx e^{-x}.$$

$$(۵) \quad y'' - ۲y' + ۵y = ۲ \cos ۲x$$

$$y'' - ۲y' + ۵y = ۱ + \cos ۲x$$

$$y'' - ۲y' + ۵y = ۱$$

$$y'' - ۲y' + ۵y = \cos ۲x$$

$$\text{معادله شاخص} \Rightarrow r^2 - ۲r + ۵ = 0 \Rightarrow r = ۱ \pm \sqrt{۱ - ۵}$$

$$\Rightarrow y_{p_1} = A s = 0 \Leftarrow \text{صفر ریشه نیست}$$

$$\Rightarrow y_{p_2} = B \cos ۲x + C \sin ۲x$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = ۲, \quad ۲i$$

$$s = 0 \text{ ریشه معادله شاخص نیست پس } -۲i = \alpha - i\beta$$

نکته ۷۶,۲. برای معادله $D[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y + g_1 + g_2 + \dots + g_t$ اگر

y_{p_1} یک جواب خاص از معادله $D[y] = g_1$ و

y_{p_2} یک جواب خاص از معادله $D[y] = g_2$ و

⋮

y_{p_t} یک جواب خاص از معادله $D[y] = g_t$ باشد، آنگاه

یک جواب خاص از معادله $D[y] = g_1 + g_2 + \dots + g_t$ است.



فصل ۳

تبدیل لاپلاس

مقدمه. تابع گاما یا تابع فاکتوریل تعمیم یافته

تعریف ۳.۱. تابع گاما (تابع فاکتوریل تعمیم یافته) با $\Gamma(x)$ نشان داده می‌شود و ضابطه آن به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

▲

نکته ۳.۲. با استفاده از آزمون‌های همگرایی (ریاضی عمومی ۱) ثابت می‌شود که انتگرال ناسره فوق به ازای هر $x > 0$ همگراست.

مثال ۳.۳.

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-t} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} [-e^{-a} + e^{-0}] = 1\end{aligned}$$

▲

نکته ۳.۴. محاسبه مقدار تابع Γ برای هر $x > 0$ ، ساده نیست. روش‌های عددی برای محاسبه $\Gamma(x)$ وجود دارد و جدول مقادیر تابع Γ موجود است. فقط برای بعضی از مقادیر x می‌توان با استفاده از روش‌های انتگرال گیری و محاسبات مقدار Γ را محاسبه کرد. به عنوان مثال می‌پذیریم (البته می‌توان محاسبه کرد که) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$:

نکته ۵,۳. تابع Γ با ضابطه $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, $x > 0$ را در نظر بگیرید. ابتدا انتگرال نامعین $\int e^{-t} t^{x-1} dt$ را در نظر می‌گیریم و یک روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \int e^{-t} t^{x-1} dt &= \frac{1}{x} e^{-t} t^x + \int \frac{1}{x} e^{-t} t^x dt \\ u = e^{-t} &\Rightarrow du = -e^{-t} dt \\ dv = t^{x-1} dt &\Rightarrow dv = \frac{1}{x} t^x \\ \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} a^x e^{-a} - \frac{1}{x} 0^x e^0 \right] \\ &+ \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt \\ \Rightarrow \forall x > 0 \quad \Gamma(x) &= \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که می‌توانیم تابع Γ را برای x های منفی نیز تعمیم بدهیم. پس در حالت کلی داریم

$$\begin{aligned} \forall x \neq -1, -2, \dots, -n, \dots, x \neq 0 \\ \Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

مثال ۶,۳

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(-\frac{3}{2} + 1\right) = -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{4}{3} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{4}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{8}{3} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{8}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$



نکته ۷,۳. با توجه به رابطه بازگشتی $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ می‌بینیم که برای هر عدد

طبیعی n داریم:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 2\Gamma(1) \\ \Gamma(n+1) &= n!\end{aligned}$$

یعنی مقادیر تابع گاما برای اعداد طبیعی همان مقادیر فاکتوریل است. به عبارت دیگر می‌توان تابع گاما را تعمیم یافته تابع فاکتوریل برای همه مقادیر حقیقی غیر از $(-1, -2, \dots)$ در نظر گرفت.

نکته ۸,۳. (فرعی) با توجه به تعریف گاما بسیاری از انتگرال‌های معین را می‌توان با استفاده از تابع گاما محاسبه کرد. در زیر فقط برای نمونه دو مثال می‌بینیم.

مثال ۹,۳.

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\infty z^{\frac{1}{3}} e^{-z^3} dz = \int_0^\infty t^{\frac{1}{3}} e^{-t} \cdot \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \\ z^3 &= t \Rightarrow z = t^{\frac{1}{3}} \Rightarrow dz = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \\ I &= \int_0^\infty \frac{1}{3} e^{-t} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{3}-1} dt \\ I &= \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}.\end{aligned}$$



مثال ۱۰,۳. انتگرال در $x = 0$ ناسره است.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx \\
 \ln x = u &\Rightarrow x = e^u \Rightarrow dx = e^u du \\
 x \rightarrow 0 &\Rightarrow u \rightarrow -\infty, x = 1 \Rightarrow u = 0 \\
 I &= \int_{-\infty}^0 e^{\frac{u}{2}} u e^u du = \int_{-\infty}^0 u e^{\frac{3}{2}u} du \\
 \frac{3}{2}u = -t &\Rightarrow \frac{3}{2}du = -dt \Rightarrow du = -\frac{2}{3}dt \\
 u \rightarrow -\infty &\Rightarrow t \rightarrow +\infty, u = 0 \Rightarrow t = 0 \\
 I &= \int_{+\infty}^0 -\frac{2}{3}te^{-t}(-\frac{2}{3}dt) \\
 I &= -\int_0^{\infty} \frac{4}{9}e^{-t}t dt = -\frac{4}{9}\Gamma(2) \\
 \Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 \Rightarrow \\
 I &= -\frac{4}{9}
 \end{aligned}$$



تمرین ۱۱,۳. (فرعی)

(الف) $I = \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x^2} dx$

(ب) $I = \int_0^1 x^2 \ln^2 x dx$

۱,۳ تبدیل لاپلاس

در این فصل می‌خواهیم با معرفی ابزاری به نام تبدیل لاپلاس و آشنا شدن با خواص آن با روشی کاملاً متفاوت با فصل‌های قبل به حل معادلات دیفرانسیل غیر همگن بپردازیم. پس ابتدا تبدیل لاپلاس را تعریف می‌کنیم، کمی با روش محاسبه و خواص آن آشنا می‌شویم و بعد به حل معادله دیفرانسیل با این روش می‌پردازیم.

تعریف ۱,۳. فرض کنید تابع f در بازه $[0, +\infty)$ تعریف شده باشد. تبدیل لاپلاس تابع f را با $F(s)$ یا $\mathcal{L}[f(x)]$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

واضح است که تبدیل لاپلاس یک انتگرال ناسره است. پس اگر این انتگرال ناسره همگرا باشد، گوئیم لاپلاس f موجود است.

▲

مثال ۱۳,۳. تابع $f(x) = 1$ را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sa} + \frac{1}{s} e^{-s \cdot 0} \right] = \frac{1}{s}$$

▲

به شرط $s > 0$.

مثال ۱۴,۳. تابع $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$ ثابت را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{ax}] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} dx = \int_0^{\infty} e^{(a-s)x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(a-s)x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)b} - \frac{1}{a-s} e^{(a-s) \cdot 0} \right] \quad \text{به شرط } s > a \\ \mathcal{L}[e^{ax}] &= \frac{1}{s-a} \quad s > a \Rightarrow \\ \mathcal{L}[1] &= \mathcal{L}[e^{0x}] = \frac{1}{s} \quad s > 0 \end{aligned}$$

▲

مثال ۱۵,۳. تابع $f(x) = x^a$ و $-1 < a \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^a] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x^a dx = \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{s}\right)^a \cdot \frac{1}{s} dt \\ sx = t &\Rightarrow x = \frac{t}{s} \Rightarrow dx = \frac{1}{s} dt \\ \mathcal{L}[x^a] &= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^a dt = \frac{1}{s^{a+1}} \Gamma(a+1) \Rightarrow \\ \mathcal{L}[x^a] &= \frac{1}{s^{a+1}} \Gamma(a+1) \end{aligned}$$

▲

۲,۳ خواص تبدیل لاپلاس

خاصیت ۱۶,۳. عملگر تبدیل لاپلاس، یک عملگر خطی است. به عبارت دیگر برای هر دو مقدار ثابت c_1 و c_2 و دو تابع f و g داریم

$$\mathcal{L}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 \mathcal{L}[f(x)] + c_2 \mathcal{L}[g(x)].$$

اثبات.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx \\ &= c_1 \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx + c_2 \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx \\ &= c_1 \mathcal{L}[f(x)] + c_2 \mathcal{L}[g(x)]. \end{aligned}$$



با استفاده از این خاصیت می‌توانیم لاپلاس توابع پیچیده‌تری را محاسبه کنیم.

مثال ۱۷,۳. لاپلاس توابع $\sinh ax$ و $\cosh ax$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh ax = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \\ \mathcal{L}[\sinh ax] &\stackrel{۱۶,۳}{=} \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{ax}] - \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{-ax}] \\ &\stackrel{۱۴,۳}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} \\ \mathcal{L}[\sinh ax] &= \frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > a, s > -a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cosh ax] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{ax}] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{-ax}] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} \\ \mathcal{L}[\cosh ax] &= \frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > a, s > -a \end{aligned}$$



مثال ۱۸,۳. لاپلاس توابع $\sin ax$ و $\cos ax$ را محاسبه کنید.

به یاد داریم که $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cos ax + i \sin ax] &= \mathcal{L}[e^{iax}] \\ \mathcal{L}[\cos ax] + i\mathcal{L}[\sin ax] &= \frac{1}{s-ia} \\ \frac{1}{s-ia} &= \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2} \\ \Rightarrow \mathcal{L}[\cos ax] &= \frac{s}{s^2+a^2} \\ \Rightarrow \mathcal{L}[\sin ax] &= \frac{a}{s^2+a^2}\end{aligned}$$

▲

مثال ۱۹,۳. لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}\text{(الف)} \quad \mathcal{L}[2x^2 + 3 + \sin 3x] &= 2\mathcal{L}[x^2] + 3\mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[\sin 3x] \\ &= 2\frac{2!}{s^3} + 3\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2+9}\end{aligned}$$

(یادآوری $a \in \mathbb{N}$, $\Gamma(a+1) = a!$, $\mathcal{L}[x^a] = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$)

$$\begin{aligned}\text{(ب)} \quad \mathcal{L}[\sin 2x \cos 2x] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} \sin 4x\right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{4}{s^2+16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ج)} \quad \mathcal{L}[\cos^2 2x] &= \mathcal{L}\left[\frac{1+\cos 4x}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[1] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 4x] \\ &= \frac{1}{2s} + \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(د)} \quad \mathcal{L}[x^{\frac{5}{2}} + \sinh 2x] &= \mathcal{L}[x^{\frac{5}{2}}] + \mathcal{L}[\sinh 2x] \\ &= \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{s^{\frac{7}{2}}} + \frac{2}{s^2-4}\end{aligned}$$

▲

تمرین ۲۰,۳.

$$\text{(۵)} \quad \mathcal{L}[\sin^2 x \cos^3 x]$$

$$\text{(۶)} \quad \mathcal{L}[\sin^3 x]$$

۳,۳ تبدیل معکوس لاپلاس

تعریف ۲۱,۳. اگر $F(s)$ یک تابع باشد، تابع پیوسته $f(x)$ بر بازه $[0, +\infty)$ را تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)$ گوییم هرگاه $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ و با $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ نمایش می‌دهیم. پس

$$\mathcal{L}[f(x)] = F(s) \Leftrightarrow f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$



در نتیجه با توجه به توابعی که قبلا لاپلاس آنها را محاسبه کردیم، می‌توانیم لاپلاس وارون خیلی از توابع را به دست آوریم. به عنوان چند مثال ساده در زیر داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] &= 1 & (\mathcal{L}[1] &= \frac{1}{s} \text{ که دیدیم که}) \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] &= e^{ax} & (\mathcal{L}[e^{ax}] &= \frac{1}{s-a} \text{ که دیدیم که}) \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] &= \cos ax \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] &= \sin ax \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right] &= \cosh ax \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] &= \sinh ax \\ \mathcal{L}^{-1}[s^{-\alpha}] &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & (\mathcal{L}[x^a] &= \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \text{ که دیدیم که}) \end{aligned}$$

مثال ۲۲,۳. به عنوان مثال

(الف) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}[s^{-2}] = \frac{x}{\Gamma(2)} = x$

(ب) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \mathcal{L}^{-1}[s^{-3}] = \frac{x^2}{\Gamma(3)} = \frac{x^2}{2!}$

(ج) $\mathcal{L}^{-1}[s^{-\frac{5}{2}}] = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})}$



نکته ۲۳,۳.

عملگر \mathcal{L}^{-1} یک عملگر خطی است. یعنی

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1F(s) + c_2G(s)] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + c_2\mathcal{L}^{-1}[G(s)].$$

در نتیجه با توجه به این نکته می‌توان لاپلاس وارون توابع پیچیده‌تری را محاسبه کرد.

مثال ۲۴،۳. لاپلاس وارون توابع زیر را محاسبه نمایید.

(الف)
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+1}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] \\ &= \cos x + 2 \sin x \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

(ج)
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-1)(s^2+3)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4} - \frac{s}{s^2-1} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2+3}\right] \\ &= \frac{s}{(s^2-1)(s^2+3)} = \frac{As+B}{s^2-1} + \frac{Cs+D}{s^2+3} \end{aligned}$$

پس از محاسبه A, B, C, D

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \cosh x - \frac{1}{4} \cos \sqrt{3}x.$$



تمرین ۲۵،۳. لاپلاس وارون توابع زیر را محاسبه نمایید.

(د) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]$

(ه) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-s-12}\right]$

(ی) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}\right]$

در ادامه خواصی از تبدیل لاپلاس را خواهیم دید که ارتباط لاپلاس یک تابع با لاپلاس مشتق آن را بیان می‌کند.

خاصیت ۲۶،۳.

قضیه ۲۷،۳. اگر تابع f بر بازه $[0, +\infty)$ پیوسته و مشتق پذیر باشد همچنین برای هر x ، $|f(x)| \leq Me^{ax}$ که M و a اعداد حقیقی ثابت هستند و $f'(x)$ بر $[0, +\infty)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(0)$$

اثبات. (بدون اثبات)



طرح اثبات

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(x)] &= \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx \\ u = e^{-sx} &\Rightarrow du = -se^{-sx} dx \\ dv = f'(x) dx &\Rightarrow v = f(x) \\ \mathcal{L}[f'(x)] &= e^{-sx} f(x) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty se^{-sx} f(x) dx \\ \mathcal{L}[f'(x)] &= s \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx - f(0) \\ \mathcal{L}[f'(x)] &= s\mathcal{L}[f(x)] - f(0). \end{aligned}$$

نتیجه ۲۸،۳. با استفاده مجدد از این خاصیت داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(x)] &= s\mathcal{L}[f'(x)] - f'(0) \\ \mathcal{L}[f''(x)] &= s^2\mathcal{L}[f(x)] - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

در حالت کلی

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = s^n \mathcal{L}[f(x)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

تا اینجا با همین اطلاعات می‌توانیم معادلات مرتبه دوم خطی غیر همگن ساده‌ای را با روش لاپلاس حل کنیم.

مثال ۲۹،۳. معادله $e^{4x} = y'' - 5y' + 6y$ ، $y(0) = 1$ ، $y'(0) = -1$ را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

روش حل. در این روش، روند کلی به این صورت است که از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم. با استفاده از خواص تبدیل لاپلاس همه عبارت‌ها را بر حسب $\mathcal{L}[y]$ تبدیل می‌کنیم. تا جایی که معادله $\mathcal{L}[y]$ برابر یک تابعی به دست آید. سپس با اعمال لاپلاس

وارون بر طرفین آن معادله تابع مجهول را به دست می‌آوریم.

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$$

$$\mathcal{L}[y'' - 5y' + 6y] = \mathcal{L}[e^{4x}]$$

$$\mathcal{L}[y''] - 5\mathcal{L}[y'] + 6\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{4x}] \quad ۱۶,۳$$

$$s^2 \mathcal{L}[y] - sy(\circ) - y'(\circ) - 5s\mathcal{L}[y] - 5y(\circ) + 6\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-4} \quad ۲۶,۳$$

$$(s^2 - 5s + 6)\mathcal{L}[y] - s - 4 = \frac{1}{s-4}$$

$$(s^2 - 5s + 6)\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-4} + s + 4 = \frac{s^2 - 15}{s-4}$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s^2 - 15}{(s-4)(s^2 - 5s + 6)}$$

$$\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 - 15}{(s-4)(s^2 - 5s + 6)}\right]$$

$$\frac{s^2 - 15}{(s-4)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = \frac{-11}{4}, C = 6$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-11}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s-3}\right]$$

$$y = \frac{1}{4}e^{4x} + \frac{-11}{4}e^{2x} + 6e^{3x}$$



تمرین ۳، ۳. معادلات زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

(الف) $y'' + 3y' + 2y = \cos x \quad y(\circ) = \circ, y'(\circ) = 2$

(ب) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} \quad y(2) = \circ, y'(2) = 1$

(ج) $y'' + y' - 2y = x \quad y(\circ) = 2, y'(\circ) = \circ$

خاصیت ۳، ۳۱.

قضیه ۳، ۳۲. اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ ، آنگاه $\mathcal{L}[-xf(x)] = \frac{dF(s)}{ds}$

اثبات.

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} (e^{-sx} f(x)) dx$$

$$= \int_0^\infty -xe^{-sx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} (-xf(x)) dx$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}[-xf(x)].$$



نتیجه ۳،۳۳. با تکرار قضیه بالا برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\mathcal{L}[(-1)^n x^n f(x)] = \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{L}[f(x)]$$

مثال ۳،۳۴. لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

۱.
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x \sin ax] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin ax] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{a}{s^2+a^2} \right) \\ &= -\left(\frac{-2as}{(s^2+a^2)^2} \right) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \end{aligned}$$

۲.
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x^2 \cos ax] &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[\cos ax] \\ &= \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s}{s^2+a^2} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2+a^2-2s^2}{(s^2+a^2)^2} \right] \\ &= \frac{-2s(s^2+a^2)^2 - 2s(s^2+a^2)(a^2-s^2)}{(s^2+a^2)^4} \\ &= \frac{2s(s^2-3a^2)}{(s^2+a^2)^3} \end{aligned}$$

۳.
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x \sin^2 ax] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin^2 ax] \\ &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L} \left[\frac{1-\cos 2ax}{2} \right] \\ &= -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+4a^2} \right] \\ &= \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2} \frac{s^2+4a^2-2s^2}{(s^2+4a^2)^2} \\ &= \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2} \frac{4a^2-s^2}{(s^2+4a^2)^2} \end{aligned}$$



تمرین ۳،۳۵.

(الف) $\mathcal{L}[x^2 e^{ax}]$

(ب) $\mathcal{L}[x^n e^{ax}], \quad \forall n \in \mathbb{N} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ با استقرا

(ج) $\mathcal{L}[x \sinh 2x]$

با توجه به خاصیت گفته شده می‌توانیم لاپلاس معکوس توابع پیچیده‌تری را به دست آوریم. کافی است تشخیص دهیم تابع داده شده مشتق چه تابعی است. به عنوان مثال به نمونه‌های زیر دقت کنید.

مثال ۳، ۳۶.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] \\
 \text{.۱} \quad &= e^{-x} - \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1}\right] \\
 &= e^{-x} - xe^{-x}
 \end{aligned}$$

زیرا

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}F(s)\right] = -x\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$\begin{aligned}
 \text{.۲} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^3}\right] &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-4}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2}x^2e^{4x}
 \end{aligned}$$

در حالت کلی (مهم)
در تمرین ۳، ۳۵ قسمت (ب) دیدیم که

$$\mathcal{L}[x^n e^{ax}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

در نتیجه

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right] = \frac{x^n e^{ax}}{n!}$$



مثال ۳، ۳۷.

$$\text{.۱} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = x$$

$$\text{.۲} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{x^2}{2!}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right] = \frac{x^n}{n!}$$



مثال ۳۸,۳. لاپلاس وارون زیر را محاسبه کنید.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right)\right]$$

حل. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right)\right] &= f(x) \\ \Rightarrow \mathcal{L}[f(x)] &= \ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right) \\ \Rightarrow \mathcal{L}[xf(x)] &= -\frac{d}{ds} \ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right) \\ \Rightarrow \mathcal{L}[xf(x)] &= \frac{\cancel{2}a}{s^{\cancel{2}}-a^{\cancel{2}}} \\ \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\cancel{2}a}{s^{\cancel{2}}-a^{\cancel{2}}}\right] &= xf(x) \\ \Rightarrow \cancel{2} \sinh ax = xf(x) &\Rightarrow f(x) = \frac{\cancel{2} \sinh ax}{x} \end{aligned}$$



تمرین ۳۹,۳.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(1 - \frac{a^{\cancel{2}}}{s^{\cancel{2}}}\right)\right] = ?$$

خاصیت ۴۰,۳.

قضیه ۴۱,۳. اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ موجود باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(u) du$$



اثبات. (بدون اثبات)

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \int_0^\infty e^{-ux} f(x) dx \\
 \int_s^\infty F(u) du &= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-ux} f(x) dx \right) du \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-ux} f(x) du \right) dx \\
 &= \int_0^\infty \left[-\frac{1}{x} e^{-ux} \right]_s^\infty f(x) dx \\
 &= \int_0^\infty e^{-sx} \frac{f(x)}{x} dx \\
 &= \mathcal{L} \left[\frac{f(x)}{x} \right]
 \end{aligned}$$

نتیجه ۴۲،۳.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\int_s^\infty F(u) du \right] = \frac{1}{x} \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

مثال ۴۳،۳.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left[\frac{\sin ax}{x} \right] &=? \\
 \mathcal{L} \left[\frac{\sin ax}{x} \right] &= \int_0^\infty \mathcal{L}[\sin ax] du \\
 &= \int_0^\infty \frac{a}{u^2+a^2} du \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_s^b \frac{a}{u^2+a^2} du \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_s^b \frac{1}{a \left(\frac{u}{a} \right)^2 + 1} du \\
 \frac{u}{a} = t &\Rightarrow \frac{du}{a} = dt, \quad u = s \Rightarrow t = \frac{s}{a} \\
 u \rightarrow \infty &\Rightarrow t \rightarrow \infty \\
 \mathcal{L} \left[\frac{\sin ax}{x} \right] &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\frac{s}{a}}^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{t^2+1} \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\tan^{-1} \frac{b}{a} - \tan^{-1} \frac{s}{a} \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{a} \\
 &= \tan^{-1} \frac{a}{s}
 \end{aligned}$$



مثال ۳، ۴۴.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\nu)^2}\right] &= ? \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\nu)^2}\right] &= f(x) \Rightarrow \\
\frac{f(x)}{x} &= \mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty \frac{u}{(u^2+\nu)^2} du\right) \\
\frac{f(x)}{x} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_s^b \frac{u}{(u^2+\nu)^2} du\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{s^2+\nu}^{b^2+\nu} \frac{1}{\nu} \frac{dt}{t^2}\right] \\
u^2 + \nu &= t \Rightarrow 2u du = dt \Rightarrow \\
\frac{f(x)}{x} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{\nu t}\right]_{s^2+\nu}^{b^2+\nu}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\nu(s^2+\nu)}\right] \Rightarrow \\
\frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{\nu} \sin \nu x \Rightarrow \\
f(x) &= \frac{1}{\nu} x \sin \nu x.
\end{aligned}$$



تمرین ۳، ۴۵. لاپلاس یا لاپلاس معکوس توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $\mathcal{L}\left[\frac{\sinh ax}{x}\right]$

(ب) $\mathcal{L}\left[\int_0^x e^{-\nu t} \frac{1-e^{-t}}{t} dt\right]$

(ج) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+1)^2}\right]$

(د) $\mathcal{L}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]$

مثال ۴۶،۳. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$xy'' + 2(x-1)y' - 2y = 0 \quad y(0) = 0 \quad ۱۶,۳$$

$$\mathcal{L}[xy''] + 2\mathcal{L}[(x-1)y'] - 2\mathcal{L}[y] = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y''] - 2\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] \quad ۳۱,۳$$

$$-\frac{d}{ds}[s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)] - 2\frac{d}{ds}[s\mathcal{L}[y] - y(0)] \quad ۲۶,۳$$

$$-2[s\mathcal{L}[y] - y(0)] - 2\mathcal{L}[y] = 0 \quad \text{مشتق گیری بر حسب } s$$

$$\Rightarrow -2s\mathcal{L}[y] - s^2\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y] - 2\mathcal{L}[y] - 2s\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y]$$

$$-2s\mathcal{L}[y] - 2\mathcal{L}[y] = 0 \quad \text{ساده سازی}$$

$$(s^2 + 2s)\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y] + (2s + 2)\mathcal{L}[y] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{L}'[y]}{\mathcal{L}[y]} = -\frac{2s+2}{s^2+2s}$$

$$\Rightarrow \ln(\mathcal{L}[y]) = -2 \int \frac{2s+2}{s^2+2s} ds$$

$$\ln(\mathcal{L}[y]) = -2 \ln(s^2 + 2s) = \ln(s^2 + 2s)^{-2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s^2+2s)^2}$$

محاسبه y با لاپلاس معکوس گرفتن از طرفین

$$\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + 2s)^2} \right]$$

تفکیک کسر

$$\frac{1}{(s^2 + 2s)^2} = \frac{1}{s^2(s+2)^2} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{(s+2)^2}$$

محاسبه ضرایب

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{4}, \quad D = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[-\frac{1}{4}\frac{1}{s}] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{4}\frac{1}{s^2}] + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+3}{(s+2)^2}]$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+2}] + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+2)^2}]$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}xe^{-2x}$$



تمرین ۴۷،۳. معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $xy'' + (x - 1)y' - y = 0 \quad y(0) = 0$

(ب) $y'' - 6y' + 9y = 6x^2e^{3x} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(ج) $xy'' + y' + xy = 0 \quad y(0) = 1$

خاصیت ۴۸،۳.

قضیه ۴۹،۳. اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ ، آنگاه $\mathcal{L}[e^{ax}f(x)] = F(s - a)$.

اثبات.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{ax}f(x)] &= \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}f(x)dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)x}f(x)dx \\ &= F(s - a). \end{aligned}$$



نتیجه ۵۰،۳.

$$\mathcal{L}[F(s - a)] = e^{ax} \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

مثال ۵۱،۳.

۱. $\mathcal{L}[e^{3x} \cos 2x] = \mathcal{L}[\cos 2x] \Big|_{s \rightarrow s-3} = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}$

۲. $\mathcal{L}[x^{\frac{5}{2}}e^{2x}] = \mathcal{L}[x^{\frac{5}{2}}] \Big|_{s \rightarrow s-2} = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{(s-2)^{\frac{7}{2}}}$

یادآوری (روش دوم) $\mathcal{L}[x^n e^{ax}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

۳.
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\cosh 2x}{\sqrt{x}}\right] &= \mathcal{L}\left[x^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[x^{-\frac{1}{2}} e^{2x}] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[x^{-\frac{1}{2}} e^{-2x}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(s-2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(s+2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[xe^x \sin \nu x \cos \nu x] &= \frac{1}{\nu} \mathcal{L}[xe^x \sin \nu x] \\
 &= \frac{1}{\nu} \mathcal{L}[x \sin \nu x] \Big|_{s \rightarrow s-1} \\
 &= \frac{\nu(s-1)}{((s-1)^2 + \nu^2)^2} \\
 \mathcal{L}[x \sin \nu x] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin \nu x] \\
 &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\nu}{s^2 + \nu^2} \right) \\
 &= \frac{\nu s}{(s^2 + \nu^2)^2} *
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s-2}{s^2 + \nu s + 5} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+2-\nu}{(s+\nu)^2 + 1} \right] \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+2}{(s+\nu)^2 + 1} \right] - \nu \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+\nu)^2 + 1} \right] \\
 &= e^{-\nu x} \cos x - \nu e^{-\nu x} \sin x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s+1)^2} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2} \right] \\
 &= e^{-x} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] - e^{-x} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] \\
 &= e^{-x} \frac{x^2}{2!} - e^{-x} \frac{x^2}{2!}
 \end{aligned}$$

(یادآوری $\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{n+1}} \right] = \frac{x^n}{n!}$)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\nu s+1}{\nu s^2 + \nu s + 5} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\nu}{\nu} \frac{s + \frac{1}{\nu}}{s^2 + s + \frac{5}{\nu}} \right] \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\nu}{\nu} \frac{s + \frac{1}{\nu}}{(s + \frac{1}{2\nu})^2 + 1} \right] \\
 &= \frac{\nu}{\nu} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2\nu}}{(s + \frac{1}{2\nu})^2 + 1} \right] \\
 &= \frac{\nu}{\nu} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \frac{1}{\nu}}{(s + \frac{1}{2\nu})^2 + 1} \right] - \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + \frac{1}{2\nu})^2 + 1} \right] \Rightarrow \\
 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\nu s+1}{\nu s^2 + \nu s + 5} \right] &= \frac{\nu}{\nu} e^{-\frac{1}{2\nu} x} \cos x - \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{2\nu}} \sin x.
 \end{aligned}$$



تمرین ۳، ۵۲.

(الف) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 - 2s + 3} \right]$

(ب) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 - 3s + 3} \right]$

(ج) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{9s^2 - 12s + 5} \right]$

(د) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2 (s^2 + 4)} \right]$

- (د) $\mathcal{L}[\sqrt{x}e^{2x}]$
- (و) $\mathcal{L}[xe^{-2x} \cos^2 ax]$
- (ی) $\mathcal{L}[x \sinh x \cos 3x]$

۴,۳ تبدیل لاپلاس توابع ناپیوسته

تا اینجا در مورد تبدیل لاپلاس توابع پیوسته صحبت کردیم. در عمل گاهی به تبدیل لاپلاس توابع قطعه به قطعه پیوسته (تعداد نقاط ناپیوستگی در یک بازه متناهی و در نقطه ناپیوستگی حد چپ و راست موجود و متناهی است) نیاز داریم. ابتدا ساده‌ترین نوع از این توابع را در نظر می‌گیریم.

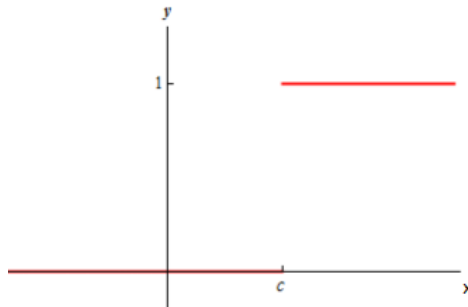
تعریف ۵۳,۳. تابع پله‌ای واحد تابعی با ضابطه زیر است و برای $c \in \mathbb{R}$ ثابت این تابع را با U_c نمایش می‌دهیم.

$$U_c(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

▲

واضح است که اگر $c = 0$ ، $U_c(x) = 1$.

نمودار تابع U_c به شکل زیر است.



حال تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای واحد را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[U_c] &= \int_0^\infty e^{-sx} U_c(x) dx \\ &= \int_0^c e^{-sx} \times 0 dx + \int_c^\infty e^{-sx} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b e^{-sx} dx \Rightarrow \\ \mathcal{L}[U_c(x)] &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} e^{-sc} \right] \\ &= \frac{e^{-sc}}{s} \quad s > 0 \end{aligned}$$

نتیجه ۵۴,۳.

$$\mathcal{L}[U_c(x)] = \frac{e^{-cs}}{s} \quad s > 0$$

مثال ۵۵,۳.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[U_{\frac{1}{2}}(x)] &= \frac{e^{-\frac{1}{2}s}}{s} \\ \mathcal{L}[U_{\frac{1}{3}}(x)] &= \frac{e^{-\frac{1}{3}s}}{s} \end{aligned}$$



از آنجا که توابع قطعه به قطعه پیوسته را می‌توان به صورت مجموع توابع پله‌ای واحد نوشت، تبدیل لاپلاس چنین توابعی را نیز می‌توانیم به دست آوریم.

مثال ۵۶,۳. تابع $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 3 \\ 0 & x \geq 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس f را به دست آورید.

حل: ابتدا $f(x)$ را بر حسب توابع پله‌ای واحد می‌نویسیم. به راحتی می‌توان دید که رابطه زیر برقرار است.

$$f(x) = x(U_0(x) - U_3(x))$$

برای دیدن تساوی بالا کافی است بررسی کنیم که برای همه مقادیر x طرف اول و طرف

دوم تساوی بالا، یک مقدار مساوی دارد.

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 3 &\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ x(U_0(x) - U_3(x)) = x(1 - 0) = x \\ \Rightarrow f(x) = x(U_0(x) - U_3(x)) \end{cases} \\ x \geq 3 &\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ x(U_0(x) - U_3(x)) = x(1 - 1) = 0 \\ \Rightarrow f(x) = x(U_0(x) - U_3(x)) \\ \Rightarrow \forall x \in [0, +\infty) \quad f(x) = x(U_0(x) - U_3(x)) \\ \Rightarrow \mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[xU_3(x)] \quad 16,3 \Rightarrow \end{cases} \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{s^2} + \frac{d}{ds} \mathcal{L}[U_3(x)] \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{-rs}}{s} \right) \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{s^2} + \frac{-re^{-rs}s - e^{-rs}}{s^2} \end{aligned}$$

▲

مثال ۵۷,۳. تبدیل لاپلاس تابع جزء صحیح $[x]$ را به دست آورید.

$$[x] = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ n & n \leq x < n+1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [x] &= 0(U_0(x) - U_1(x)) + 1(U_1(x) - U_2(x)) \\ &\quad + 2(U_2(x) - U_3(x)) + \dots + n(U_n(x) - U_{n+1}(x)) \\ &\quad + \dots \\ \Rightarrow [x] &= U_1(x) + U_2(x) + \dots + U_n(x) + \dots \\ \Rightarrow \mathcal{L}[[x]] &= \mathcal{L}[U_1(x)] + \mathcal{L}[U_2(x)] + \dots + \mathcal{L}[U_n(x)] + \dots \\ \Rightarrow \mathcal{L}[[x]] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}[U_n(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[[x]] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s} = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-s})^n \\ & \text{اما می‌دانیم که } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ برای } |x| < 1 \\ & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-s})^n = \frac{1}{1-e^{-s}} \quad s > 0 \Rightarrow \\ \mathcal{L}[[x]] &= \frac{1}{s} [\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-s})^n - 1] \\ &= \frac{1}{s} \left[\frac{1}{1-e^{-s}} - 1 \right] \Rightarrow \\ \mathcal{L}[[x]] &= \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})} \quad s > 0 \end{aligned}$$



تمرین ۵۸,۳. لاپلاس تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ -1 & 2 \leq x < \pi \\ 0 & x \geq \pi \end{cases}$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1(U_0(x) - U_2(x)) - 1(U_2(x) - U_\pi(x)) + 0(U_\pi(x)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

در ادامه تاثیر ضرب تابع پله واحد در یک تابع را در تبدیل لاپلاس آن بررسی می‌کنیم.

خاصیت ۵۹,۳.

قضیه ۶۰,۳. اگر $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ ، آنگاه $\mathcal{L}[U_c(x)f(x-c)] = e^{-cs}$.

اثبات.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[U_c(x)f(x-c)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx} U_c(x) f(x-c) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x-c) dx \\ & \quad x-c = t \\ & \quad x=c \Rightarrow t=0 \\ & \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(c+t)} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sc} e^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-sc} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \Rightarrow \\ \mathcal{L}[U_c(x)f(x-c)] &= e^{-cs} \mathcal{L}[f(x)] \end{aligned}$$



نتیجه ۶۱,۳.

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)] = U_c(x)\mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{x \rightarrow x-c}$$

مثال ۶۲,۳. تبدیل لاپلاس توابع زیر را محاسبه کنید.

۱.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[U_2(x) \sin x] &= \mathcal{L}[U_2(x) \sin(x - 2 + 2)] \\ & \text{می‌دانیم که: } (\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \mathcal{L}[U_2(x)(\sin(x - 2) \cos 2 + \cos(x - 2) \sin 2)] \\ &= \cos 2 \mathcal{L}[U_2(x) \sin(x - 2)] + \sin 2 \mathcal{L}[U_2(x) \cos(x - 2)] \\ &= \cos 2 \times e^{-2s} \frac{1}{s^2+1} + \sin 2 \times e^{-2s} \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \\ \mathcal{L}[U_2(x) \sin x] &= \frac{e^{-2s}}{s^2+1} (\cos 2 + s \sin 2) \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(x-1)^2 U_\pi(x)] &= \mathcal{L}[(x-\pi+\pi-1)^2 U_\pi(x)] \\ &= \mathcal{L}[(x-\pi)^2 U_\pi(x)] + \mathcal{L}[2(\pi-1)(x-\pi)U_\pi(x)] \\ & \quad + \mathcal{L}[(\pi-1)^2 U_\pi(x)] \\ &= e^{-\pi s} \mathcal{L}[x^2] + 2(\pi-1)e^{-\pi s} \mathcal{L}[x] + (\pi-1)^2 \mathcal{L}[U_\pi(x)] \\ &= e^{-\pi s} \left(\frac{2}{s^3} + 2(\pi-1) \frac{1}{s^2} + (\pi-1)^2 \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$



مثال ۶۳,۳. لاپلاس معکوس توابع زیر را به دست آورید.

۱.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right] \\ &= x - U_2(x)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]_{x \rightarrow x-2} \\ &= x - U_2(x)(x-2) \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2-s-2}\right] &= -\frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+1}\right] + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s-2}\right] \\ \frac{1}{s^2-s-2} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} \Rightarrow A = -\frac{1}{3}, B = \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{3} U_2(x) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]_{x \rightarrow x-2} + \frac{1}{3} U_2(x) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]_{x \rightarrow x-2} \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2-s-2}\right] &= -\frac{1}{3} U_2(x) (e^{-(x-2)} - e^{2(x-2)}) \end{aligned}$$



تمرین ۶۴,۳. تبدیل لاپلاس یا لاپلاس معکوس توابع زیر را به دست آورید.

$$(الف) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{\pi}{\psi} \\ \sin x & x \geq \frac{\pi}{\psi} \end{cases}, \quad \mathcal{L}[f(x)] = ?$$

$$(ب) \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < \frac{\pi}{\psi} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{\psi} \end{cases}, \quad \mathcal{L}[f(x)] = ?$$

$$(ج) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}(s-2)}{s^2+4s+5}\right]$$

$$(د) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\psi s}}{(\psi s-1)^2}\right]$$

$$(ه) \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\psi s}(\psi s+1)}{s^2+5s^2+11s+7}\right]$$

مثال ۶۵,۳. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + \psi y' + y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{\pi}{\psi} \\ \cos \psi x & x \geq \frac{\pi}{\psi} \end{cases} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

ابتدا تبدیل لاپلاس تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{\pi}{\psi} \\ \cos \psi x & x \geq \frac{\pi}{\psi} \end{cases}$$

را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \cos \psi x U_{\frac{\pi}{\psi}}(x) = U_{\frac{\pi}{\psi}}(x) \cos \psi \left(x - \frac{\pi}{\psi} + \frac{\pi}{\psi}\right)$$

$$f(x) = U_{\frac{\pi}{\psi}}(x) \cos[\psi \left(x - \frac{\pi}{\psi}\right) + \pi] = -U_{\frac{\pi}{\psi}}(x) \cos \psi \left(x - \frac{\pi}{\psi}\right)$$

$$\mathcal{L}[f(x)] = -\mathcal{L}\left[U_{\frac{\pi}{\psi}}(x) \cos \psi \left(x - \frac{\pi}{\psi}\right)\right]$$

$$\mathcal{L}[f(x)] = -e^{-\frac{\pi}{\psi}s} \mathcal{L}[\cos \psi x] = -e^{-\frac{\pi}{\psi}s} \frac{s}{s^2+4}$$

حال از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم.

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(x)] \quad ۱۶,۳$$

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(\circ) - y'(\circ) + 2s\mathcal{L}[y] - 2y(\circ) + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(x)] \quad ۲۶,۳$$

$$(s^2 + 2s + 1)\mathcal{L}[y] = -e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y] = -e^{\frac{\pi}{2}s} \frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + 2s + 1)}$$

$$\frac{s}{(s^2 + 4)(s + 1)^2} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{(s + 1)^2}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{3}{10}, B = \frac{1}{10}, C = \frac{3}{10}, D = -\frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{1}{10}e^{-\frac{\pi}{2}s} \left[\frac{-3s}{s^2 + 4} + \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{3s}{(s + 1)^2} - \frac{1}{(s + 1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{10}U_{\frac{\pi}{2}}(x) \left\{ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-3s}{s^2 + 4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 4}\right] \right. \\ \left. + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s}{(s + 1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 1)^2}\right] \right\}_{x \rightarrow x - \frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{10}U_{\frac{\pi}{2}}(x) \left\{ -3 \cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ \left. + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 1)^2}\right] \right\}_{x \rightarrow x - \frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{10}U_{\frac{\pi}{2}}(x) \left\{ -3 \cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ \left. + 3e^{-(x - \frac{\pi}{2})} - \Delta e^{-(x - \frac{\pi}{2})}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right\}.$$



تمرین ۶۶,۳. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(الف) \quad y'' + y = \begin{cases} x & 0 \leq x < 4 \\ 3 & x \geq 4 \end{cases}, \quad y(\circ) = y'(\circ) = 0$$

$$(ب) \quad y'' - y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & x \geq 1 \end{cases}, \quad y(\circ) = 1, \quad y'(\circ) = 0$$

$$(ج) \quad y'' - 4y = U_2(x) - U_3(x), \quad y(\circ) = y'(\circ) = 0$$

$$(د) \quad y' - y = (U_1(x) - U_3(x))e^x, \quad y(\circ) = 4$$

۵,۳ تبدیل لاپلاس توابع متناوب

تعریف ۶۷,۳. تابع متناوب با دوره تناوب T ، تابعی است که برای هر $x \in D_f$

$$f(x+T) = f(x).$$

▲ (دوره تناوب، کوچک‌ترین عدد با خاصیت فوق است)

قضیه ۶۸,۳. اگر f بر بازه $[0, +\infty)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}[f(x)] = \frac{\int_0^T e^{-sx} f(x) dx}{1 - e^{-sT}}.$$

اثبات.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(x)] &= \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^T e^{-sx} f(x) dx \\ &+ \int_T^{2T} e^{-sx} f(x) dx + \dots + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx} f(x) dx + \dots \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[f(x)] = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx} f(x) dx$$

$$x = nT \Rightarrow u = 0$$

$$x - nT = u, \quad x = (n+1)T \Rightarrow u = T$$

$$dx = du$$

$$\mathcal{L}[f(x)] = \sum_{n=0}^\infty \int_0^T e^{-s(u+nT)} f(u+nT) du \Rightarrow$$

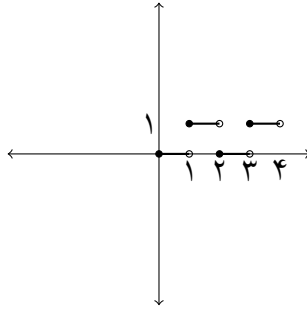
$$\mathcal{L}[f(x)] = \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-snT} \right) \left(\int_0^T e^{-su} f(u) du \right) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(x)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-su} f(u) du.$$

■

مثال ۶۹,۳.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$$



طبق فرمول قضیه ۶۸,۳

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-sx} f(x) dx \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-sx} dx + \int_1^2 e^{-sx} dx \right] = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{1}{s} (e^{-2s} - e^{-s}) \right] \Rightarrow \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})} \Rightarrow \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}. \end{aligned}$$

▲

مثال ۷۰,۳. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + y = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} y(0) = y'(0) = 0 \\ f(x+2) = f(x) \end{matrix}$$

طرف راست معادله همان تابع $f(x)$ در مثال ۶۹,۳ است که تبدیل لاپلاس آن را محاسبه کردیم. از طرفین معادله لاپلاس می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[f(x)] \\ s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y] &= \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \\ (s^2 + 1)\mathcal{L}[y] &= \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}[y] &= \frac{e^{-s}}{s(s^{\gamma}+1)(1+e^{-s})} \\ \Rightarrow y &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s^{\gamma}+1)(1+e^{-s})}\right] \\ \frac{1}{s(s^{\gamma}+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^{\gamma}+1} \quad A=1, B=-1, C=0 \\ \Rightarrow y &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-s}}{(s^{\gamma}+1)(1+e^{-s})}\right] \\ \Rightarrow y &= f(x) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-s}}{(s^{\gamma}+1)(1+e^{-s})}\right] \end{aligned}$$

می‌دانیم که $\frac{1}{1+e^{-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-s})^n$ پس $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= f(x) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^{\gamma}+1} e^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-sn}\right] \\ \Rightarrow y &= f(x) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^{\gamma}+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-s(n+1)}\right] \\ \Rightarrow y &= f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-s(n+1)}}{s^{\gamma}+1}\right] \\ \Rightarrow y &= f(x) + (-1)^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(x) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^{\gamma}+1}\right]_{x \rightarrow x-(n+1)} \\ \Rightarrow y &= f(x) + (-1)^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(x) \cos(x - (n+1)). \end{aligned}$$

▲

تمرین ۳، ۷۱. لاپلاس توابع زیر را به دست آورید.

$$(الف) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ -1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$$

$$(ب) \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

$$(ج) \quad y'' - y = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ -1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad f(x+2) = f(x), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

۳، ۶ حاصل ضرب کانولوسین (پیشگی)

یادآوری: به یاد داریم که $\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$ و دیدیم که عملگر لاپلاس یک عملگر خطی است.

با یک مثال ساده می‌توانیم ببینیم که عملگر لاپلاس برخلاف عمل جمع، روی عمل ضرب

پخش نمی‌شود، یعنی در حالت کلی تساوی زیر برقرار نیست.

$$\mathcal{L}[f(x) \times g(x)] \stackrel{?}{=} \mathcal{L}[f(x)] \times \mathcal{L}[g(x)]$$

به عنوان مثال فرض کنید $f(x) = g(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] \times \mathcal{L}[g] &= \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \\ \mathcal{L}[f \times g] &= \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

حال در ادامه به دنبال تعریف عملگری روی دو تابع هستیم، لاپلاس آن عملگر روی دو تابع برابر حاصل ضرب لاپلاس دو تابع شود.

تعریف ۷۲،۳. حاصل ضرب کانولوسین (پیچشی) دو تابع f و g را با $f * g$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$



خواص حاصل ضرب کانولوسین (پیچشی)

می‌توان با استفاده از تعریف دید که خواص زیر برقرار است.

۱. جابه جایی $(f * g)(x) = (g * f)(x)$

۲. شرکت پذیری $f * (g * h) = (f * g) * h$

۳. توزیع پذیری $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

۴. $f * 0 = 0 * f = 0$

۵. تابع ثابت ۱ عضو خنثی نیست یعنی $f * 1 \neq f$

مثال ۷۳،۳.

$$\cos x * 1 = \int_0^x \cos t dt = \sin x$$



$$f * f \neq f^2 \quad \text{.۶}$$

مثال ۳، ۷۴.

$$1 * 1 = \int_0^x dt = x$$



خاصیت ۳، ۷۵.

قضیه ۳، ۷۶. برای دو تابع f و g داریم:

$$\mathcal{L}[(f * g)(x)] = \mathcal{L}[f(x)] \times \mathcal{L}[g(x)]$$

نتیجه ۳، ۷۷.

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

اثبات. فرض کنید $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ و $\mathcal{L}[g(x)] = G(s)$.

$$F(s) \times G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u) du \right) \left(\int_0^\infty e^{-st} g(t) dt \right)$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(u+t)} f(u) g(t) du dt \right)$$

$$u + t = x$$

$$u = 0 \Rightarrow x = t \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$u \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty e^{-sx} f(x-t) g(t) dx \right) dt \quad (۱)$$

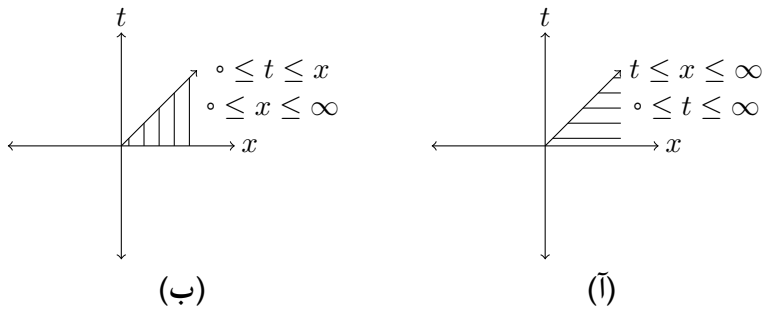
$$\text{تغییر ترتیب انتگرال‌ها} \Rightarrow \int_0^\infty \left(\int_0^x e^{-sx} f(x-t) g(t) dt \right) dx \quad (۲)$$

$$\Rightarrow F(s) \times G(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \left(\int_0^x f(x-t) \cdot g(t) dt \right) dx$$

$$\Rightarrow F(s) \times G(s) = \mathcal{L} \left[\int_0^x f(x-t) \cdot g(t) dt \right]$$

$$\Rightarrow F(s) \times G(s) = \mathcal{L}[f * g].$$





مثال ۷۸,۳. لاپلاس توابع زیر را حساب کنید. فرض کنید $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] &= \mathcal{L}[(f * 1)(x)] \\
 &= \mathcal{L}[f(x)] \times \mathcal{L}[1] \Rightarrow \\
 \mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] &= \frac{1}{s}F(s)
 \end{aligned}$$

دقت کنید که این تساوی را قبلا از خاصیت ۲۶,۳ می توانستیم نشان دهیم.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[e^x \int_0^x e^{-t} \sin t dt\right] &= \mathcal{L}\left[\int_0^x e^{x-t} \sin t dt\right] \\
 &= \mathcal{L}[e^x * \sin x] \\
 &= \mathcal{L}[e^x] \times \mathcal{L}[\sin x] \\
 &= \frac{1}{s-1} \times \frac{1}{s^2+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[e^x \int_0^x e^{-\gamma u} \left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right) du\right] &= \mathcal{L}\left[\int_0^x e^{x-u} \left(\frac{e^{-u}-e^{-\gamma u}}{u}\right) du\right] \\
 &= \mathcal{L}\left[e^x * \frac{e^{-x}-e^{-\gamma x}}{x}\right] \\
 &= \mathcal{L}[e^x] \cdot \mathcal{L}\left[\frac{e^{-x}-e^{-\gamma x}}{x}\right] \\
 &= \frac{1}{s-1} \times \int_s^\infty \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+\gamma}\right) du \\
 &= \frac{-1}{s-1} \ln \left|\frac{s+\gamma}{s+1}\right|.
 \end{aligned}$$



مثال ۷۹,۳. تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\gamma}(s+1)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\gamma}} \times \frac{1}{s+1}\right] \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\gamma}}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\
 &= x * e^{-x} \\
 &= \int_0^x (x-t)e^{-t} dt \\
 \cdot 1 \quad x-t &= u \Rightarrow dx = du \\
 e^{-t} dt &= dv \Rightarrow v = -e^{-t} \Rightarrow \\
 &= -e^{-t}(x-t) \Big|_0^x + \int_0^x e^{-t} dt \\
 &= x - e^{-x} + 1
 \end{aligned}$$

دقت کنید که با روش‌های قبلی و تفکیک کسر هم این مساله را می‌توانیم حل کنیم.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^{\gamma}+1)^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\gamma}+1} \times \frac{1}{s^{\gamma}+1}\right] \\
 &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\gamma}+1}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\gamma}+1}\right] \\
 &= \sin x * \sin x \\
 &= \int_0^x \sin(x-t) \sin t dt \\
 \cdot 2 \quad &= \int_0^x -\frac{1}{2}[\cos x - \cos(x-2t)] dt \\
 &= -\frac{1}{2}(\cos x) \cdot x - \frac{1}{2} \int_0^x \cos(x-2t) dt \\
 x-2t &= u, t=0 \Rightarrow u=x \\
 -2dt &= du, t=x \Rightarrow u=-x \\
 &= -\frac{1}{2}x \cos x + \frac{1}{2} \int_x^{-x} \cos u du \\
 &= -\frac{1}{2}x \cos x + \frac{1}{2}(\sin(-x) - \sin x) \\
 &= -\frac{1}{2}x \cos x - \frac{1}{2} \sin x.
 \end{aligned}$$



تمرین ۸۰، ۳. لاپلاس یا لاپلاس معکوس‌های زیر را به دست آورید.

(الف) $\mathcal{L}\left[\int_0^x \frac{\cos(x-t)}{t} \sinh t dt\right]$

(ب) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^{\gamma}(s^{\gamma}+a^{\gamma})}\right]$

نشان دهید:

(ج) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s(s-1)}}\right] = \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du$

حال با این اطلاعات می‌توانیم معادلات دیفرانسیل‌های بیشتری حل کنیم.
یادآوری.

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{\mathcal{L}[f(x)]}{s}$$

مثال ۳، ۸۱.

$$y'(x) + 3y(x) + 2\int_0^x y(t)dt = x \quad y(0) = 1$$

$$\mathcal{L}[y'] + 3\mathcal{L}[y] + 2\mathcal{L}\left[\int_0^x y(t)dt\right] = \mathcal{L}[x]$$

$$\Rightarrow s\mathcal{L}[y] - y(0) + 3\mathcal{L}[y] + \frac{2}{s}\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \left(s + 3 + \frac{2}{s}\right)\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

$$\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 3s + 2)}\right]$$

$$\frac{s^2 + 1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = -2, \quad C = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$y = \frac{1}{2} - 2e^{-x} + \frac{5}{2}e^{-2x}.$$



تمرین ۳، ۸۲. معادلات دیفرانسیل (انتگرال) زیر را حل کنید.

(الف) $y' + y + \int_0^x y(t)dt = 2U_1(x) - U_2(x) \quad y(0) = 0$

(ب) $e^x y(x) = x + \int_0^x e^t y(t) \sin(x-t)dt$

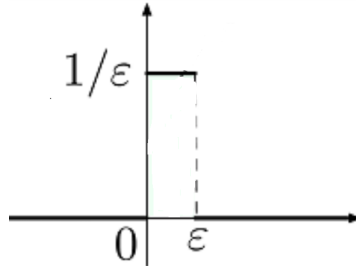
(ج) $y' = e^x + \cos x \int_0^x y(t) \cos tdt + \sin x \int_0^x y(t) \sin tdt \quad y(0) = 0$

توجه: به معادله‌ای که شامل یک تابع مجهول و انتگرال آن باشد، معادله انتگرال می‌گویند.

۷,۳ تابع دلتای دیراک (تابع ضربه‌ای)

گاهی اوقات با توابعی سر و کار داریم که در یک فاصله کوتاه مانند $[0, \varepsilon]$ مقدار آنها خیلی زیاد است ولی در بقیه نقاط صفر هستند. به طور دقیق‌تر فرض کنید $\varepsilon > 0$ یک عدد حقیقی کوچک باشد. تابع δ_ε (نماد است) را روی بازه $[0, +\infty)$ با ضابطه زیر در نظر بگیرید.

$$\delta_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq x < \varepsilon \\ 0 & x \geq \varepsilon \end{cases}$$



تابع δ_ε را ε ضربه (ε) پالس می‌نامیم.

$$\text{دقت کنید که } \int_0^\infty \delta_\varepsilon(x) dx = \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\varepsilon} = 1$$

تعریف ۸۳,۳. تابع دلتای دیراک (تابع ضربه‌ای) را با نماد $\delta(x)$ نمایش می‌دهیم و عبارتست از $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta_\varepsilon(x)$ به عبارت دیگر

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$



اگر مقدار بی‌نهایت در نقطه $x = x_0$ اتفاق بیفتد تابع را با $\delta(x - x_0)$ نمایش

می‌دهیم.

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases}$$

قضیه ۸۴,۳. اگر f روی $[0, +\infty)$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_0^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

■

اثبات. (بدون اثبات)

نتیجه ۸۵,۳

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta(x - x_0)] &= e^{-sx_0} \\ \mathcal{L}[\delta(x - x_0)] &= \int_0^{\infty} e^{-sx}\delta(x - x_0)dx = e^{-sx_0}\end{aligned}$$

نتیجه ۸۶,۳

$$\mathcal{L}[\delta(x)] = 1$$

به طور معادل:

$$\mathcal{L}^{-1}[1] = \delta(x), \quad \mathcal{L}^{-1}[e^{-sx_0}] = \delta(x - x_0)$$

از این پس می‌توانیم معادلاتی را حل کنیم که شامل تابع دلتا هستند.

مثال ۸۷,۳. معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}y'' + 2y' + 5y &= 2\delta(x - \pi)\cos x & y(0) = y'(0) &= 1 \\ \mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] &= 2\mathcal{L}[\delta(x - \pi)\cos x]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta(x - \pi)\cos x] &= \int_0^{\infty} e^{-sx}\cos x\delta(x - \pi)dx \\ &= f(\pi) \\ &= e^{-s\pi}\cos \pi \\ &= -e^{-s\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow s^2 \mathcal{L}[y] - sy(\circ) - y'(\circ) + 2s \mathcal{L}[y] - 2y(\circ) + 5 \mathcal{L}[y] = -2e^{-s\pi} \\
&\Rightarrow (s^2 + 2s + 5) \mathcal{L}[y] - s - 1 - 2 = -2e^{-s\pi} \\
&\Rightarrow (s^2 + 2s + 5) \mathcal{L}[y] = -2e^{-s\pi} + s + 3 \\
&\Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{-2e^{-s\pi} + s + 3}{s^2 + 2s + 5} \\
&\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-2e^{-s\pi} + s + 3}{s^2 + 2s + 5} \right] \\
&\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-2e^{-s\pi} + s + 3}{(s+1)^2 + 4} \right] \\
&\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-2e^{-s\pi}}{(s+1)^2 + 4} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s+1)^2 + 4} \right] \\
&\Rightarrow y = -U_\pi(x) e^{-(x-\pi)} \sin 2(x-\pi) + e^{-x} \cos 2x + e^{-x} \sin 2x.
\end{aligned}$$



تمرین ۸۸,۳. معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $y'' + 2y' + 2y = \delta(x) + 3\delta(x-\pi) \quad y(\circ) = y'(\circ) = 0$

(ب) $y'' + y = \cos 2x - \delta(x-1) \quad y(\circ) = y'(\circ) = 0$

۸,۳ تمرین‌های مروری

معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $y'' + 4y = (1 + U_\pi(x)) \sin x \quad y(\circ) = y'(\circ) = 0$

(ب) $y'' + y = U_\pi(x) \delta(x-\pi) \quad y(\circ) = y'(\circ) = 0$

(ج) $y'' + 2y' + y = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 5 \\ \delta(x-6) & x \geq 5 \end{cases} \quad y(\circ) = y'(\circ) = 0$

(د) $\varphi(x) - \delta(x) = e^{2x} + U_\pi(x) + e^x \int_0^x e^{-t} \varphi(t) dt$

(ه) $y(x) = \sin x + 4e^{-x} - 2 \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt$

(و) $y'' + y = x \sin x \quad y(\circ) = y'(\circ) = 0$

(ز) $y'' + y = x(1 - U_\pi(x)) \quad y(\circ) = 5, y'(\circ) = 0$

۹,۳ خلاصه لاپلاس توابع مورد نیاز و خواص لاپلاس

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1] &= \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[e^{ax}] &= \frac{1}{s-a} \\ \mathcal{L}[x^a] &= \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \\ \mathcal{L}[x^n] &= \frac{n!}{s^{n+1}} \\ \mathcal{L}[\sin ax] &= \frac{a}{s^2+a^2} \\ \mathcal{L}[\cos ax] &= \frac{s}{s^2+a^2} \\ \mathcal{L}[\sinh ax] &= \frac{a}{s^2-a^2} \\ \mathcal{L}[\cosh ax] &= \frac{s}{s^2-a^2} \\ \mathcal{L}[U_c(x)] &= \frac{e^{-cs}}{s} \\ \mathcal{L}[\delta(x-x_0)] &= e^{-sx_0} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(0)$	۲۶,۳
$\mathcal{L}[f''(x)] = s^2\mathcal{L}[f(x)] - sf(0) - f'(0)$	۲۶,۳
$\mathcal{L}[xf(x)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(x)]$	۳۱,۳
$\mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f(x)]$	۳۱,۳
$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$	۴۸,۳
$\mathcal{L}[U_c(x)f(x-c)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(x)]$	۵۹,۳
$\mathcal{L}[\int_0^x f(t)dt] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(x)]$	؟؟, ۷۵,۳
$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \times \mathcal{L}[g]$??
$\mathcal{L}[f(x)\delta(x-x_0)] = e^{-sx_0} f(x_0)$??
$\mathcal{L}[f(x)] = \frac{\int_0^T e^{-sx} f(x) dx}{1-e^{-sT}}$	تابع متناوب با دوره تناوب T

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

فصل ۴

حل معادلات دیفرانسیل به روش سری‌های توانی

در فصل حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، با نحوه حل معادلات دیفرانسیل همگن با ضرایب ثابت آشنا شدیم و دیدیم که اگر ضرایب ثابت نباشد، حل معادله پیچیده‌تر است. در این حالت اگر یک جواب از معادله را داشتیم، جواب دوم را با استفاده از روش کاهش مرتبه به دست می‌آوریم. در غیر این صورت، یعنی اگر یک جواب را هم نداشته باشیم چه باید کرد؟

بعد از معادلات خطی با ضرایب ثابت، ساده‌ترین معادلات، معادلاتی هستند که ضرایب آنها چند جمله‌ای هستند. یعنی معادلاتی به فرم

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

که در آن $P(x)$ ، $Q(x)$ و $R(x)$ چند جمله‌ای هستند. برای حل چنین معادلاتی در این فصل از "سری‌های توانی" استفاده می‌کنیم. ابتدا یک یادآوری از سری‌های توانی و مطالب مورد نیاز ارائه می‌کنیم.

۱. یک سری توانی حول نقطه x_0 عبارتست از

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

که $x_0, a_0, a_1, a_2, \dots$ اعداد حقیقی ثابت هستند.

۲. در حقیقت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n(x-x_0)^n$$

اگر حد فوق همگرا باشد، گوئیم سری همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌نامیم.

۳. مجموعه همه مقادیر x که سری توانی به ازای آنها همگرا است را دامنه همگرایی سری توانی می‌نامیم.

مثال ۱، ۴. برای سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ، دامنه همگرایی $\{x : |x| < 1\}$ است. ▲

۴.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$$

۵.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) (x-x_0)^n$$

۶. اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ، آنگاه

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$$

و

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x-x_0)^{n-2}$$

۷. تعویض اندیس گذاری

اگر بخواهیم اندیس از صفر شروع شود. $n \mapsto n + 2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(x)^{n+2}$$

اگر بخواهیم جمله عمومی توان $(x-a)^n$ باشد. $n - 2 \mapsto n \Rightarrow n \mapsto n + 2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n(x-a)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)a_{n+2}(x-a)^n$$

اگر بخواهیم جمله عمومی توان x^{n+r} باشد. $n + 1 \mapsto n \Rightarrow n \mapsto n - 1$

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n(x)^{n+r-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n(x)^{n+r+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1)a_{n-1}x^{n+r} \end{aligned}$$

نکته ۲،۴. هرگاه n را در جمله عمومی افزایش دهیم در اندیس \sum را کاهش می‌دهیم و اگر n را در جمله عمومی کاهش دهیم، در اندیس \sum را افزایش می‌دهیم.

برای جمع دو سری توانی باید توان‌های جملات عمومی و اندیس‌ها یکی باشد.

۸. توابع چند جمله‌ای در همه \mathbb{R} دارای نمایش به صورت سری توانی است. (تحلیلی است). توابع گویا (نسبت دو چند جمله‌ای) در همه نقاط \mathbb{R} دارای نمایش به صورت سری توانی است (تحلیلی است) مگر در نقاطی که مخرج صفر باشد.

اکنون معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

که $P(x)$ ، $Q(x)$ و $R(x)$ توابع چند جمله‌ای هستند را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۳،۴. اگر x_0 یک نقطه‌ای در \mathbb{R} باشد که $P(x_0) \neq 0$ ، گوئیم x_0 نقطه عادی معادله و در غیر این صورت x_0 را نقطه غیر عادی می‌نامیم. ▲

مثال ۴،۴. نقاط عادی و نقاط غیر عادی در معادلات زیر را تعیین کنید.

(الف) $y'' + x^2 y' + 2xy = 0$ همه نقاط عادی هستند.

(ب) $(2 + x^2)y'' - xy' - 3y = 0$ همه نقاط حقیقی عادی هستند.

$$2 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}i$$

(ج) $(x^2 - 2x)y'' + 5(x - 1)y' + 3y = 0$

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2$$

نقاط $x_0 = 2$ و $x_0 = 0$ نقاط غیر عادی و سایر نقاط عادی هستند.

(د) $x^2(1 - x^2)y'' + 2xy' + 4y = 0$

$$x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$$

نقاط $\{0, 1, -1\}$ نقاط غیر عادی و سایر نقاط عادی هستند.



۱,۴ حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با استفاده از سری‌های توانی حول نقطه عادی

قضیه ۵,۴. اگر x_0 یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

باشد، آنگاه جواب عمومی معادله عبارتست از

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

که در آن a_0 و a_1 دلخواه و y_1 و y_2 دو سری جواب مستقل خطی هستند.

حل معادلات دیفرانسیل به روش سری‌های توانی _____ ۱۲۱

مثال ۶,۴. جواب عمومی معادله $y'' + x^2 y' + 2xy = 0$ را به صورت سری حول نقطه $x = 0$ بیابید.

حل: $x = 0$ نقطه عادی است. قرار می‌دهیم

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

y ، y' و y'' را در معادله جای گذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

توان‌های x را یکی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) a_{n+3} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+1} &= 0 \\ \Rightarrow 2a_2 x^{-1+1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+2) a_{n+3} + (n+2) a_n] x^{n+1} &= 0 \\ \Rightarrow 2a_2 = 0, (n+3)(n+2) a_{n+3} + (n+2) a_n = 0 \quad \forall n & \\ \Rightarrow a_2 = 0, a_{n+3} = -\frac{a_n}{n+3} \quad n = 0, 1, 2, \dots & \\ \Rightarrow a_3 = -\frac{a_0}{3}, a_4 = -\frac{a_1}{4}, a_5 = -\frac{a_2}{5} = 0 & \\ \Rightarrow a_6 = -\frac{a_3}{6} = \frac{a_0}{3 \times 6}, a_7 = -\frac{a_4}{7} = \frac{a_1}{4 \times 7} & \\ \Rightarrow a_8 = -\frac{a_5}{8} = 0, a_9 = -\frac{a_6}{9} = -\frac{a_0}{3 \times 6 \times 9} x^9 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\ \Rightarrow y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{3} x^3 - \frac{a_1}{4} x^4 + \frac{a_0}{3 \times 6} x^6 \\ &\quad + \frac{a_1}{4 \times 7} x^7 - \frac{a_0}{3 \times 6 \times 9} x^9 \\ \Rightarrow y &= a_0 \left(1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3 \times 6} - \frac{x^9}{3 \times 6 \times 9} + \dots \right) \\ &\quad + a_1 \left(x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{4 \times 7} - \dots \right). \end{aligned}$$

▲

مثال ۷,۴. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از سری‌های توانی حول نقطه $x = 0$ حل کنید.

$$y'' - 2xy' - 2y = e^x$$

حل: قرار می‌دهیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$ و $x_0 = 0$ نقطه عادی است.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

y, y' و y'' را در معادله جای گذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = e^x$$

توان‌های x را یکی می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2n) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n+1) a_n] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1) a_{n+2} - 2(n+1) a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \left(\frac{1}{n!} + 2(n+1) a_n \right) \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} + \frac{2}{n+2} a_n \quad n \geq 0$$

$$\Rightarrow n=0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!} + a_0$$

$$\Rightarrow n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!} + \frac{2}{3} a_1$$

$$\Rightarrow n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4!} + \frac{2}{4} a_2 = \frac{1}{4!} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2!} + a_0 \right)$$

$$\Rightarrow y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow y = a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2!} + a_0 \right) x^2 + \left(\frac{1}{3!} + \frac{2}{3} a_1 \right) x^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_0 \right) x^4 + \dots$$

$$\Rightarrow y = a_0 (1 + x^2 + \frac{1}{2} x^4 + \dots) + a_1 (x + \frac{2}{3} x^3 + \dots) + \left(\frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots \right)$$



مثال ۸,۴. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر با شرایط اولیه را به دست آورید.

$$(x^2 - 2x)y'' + 5(x-1)y' + 3y = 0, \quad y(1) = 6, \quad y'(1) = 3$$

حل معادلات دیفرانسیل به روش سری‌های توانی _____ ۱۲۳

حل: چون شرایط اولیه در نقطه $x_0 = 1$ داده شد، جواب را حول $x_0 = 1$ به دست می‌آوریم.
 $x_0 = 1$ نقطه عادی برای معادله است. قرار می‌دهیم

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-1)^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$$

y, y', y'' را در معادله جای گذاری می‌کنیم. نکته مهم این است که برای اینکه بتوانیم سری‌ها را با هم جمع کنیم باید همه ضرایب در معادله را هم به صورت سری حول $x_0 = 1$ بنویسیم.

$$P(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$

$$Q(x) = 5(x-1)$$

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots \\ y(1) &= a_0 = 6, \quad y'(1) = a_1 = 3 \\ ((x-1)^2 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} \\ &+ 5(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-1)^{n-1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = 0 \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} 5n a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n(x-1)^n \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n)(n-1) + 3 + 5n] a_n(x-1)^n \\ &- \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = 0 \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n^2 + 4n + 3)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}] (x-1)^n = 0 \\ \Rightarrow (n^2 + 4n + 3)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \quad \forall n \\ \Rightarrow a_{n+2} &= \frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad \forall n \\ \Rightarrow a_{n+2} &= \frac{n+3}{n+2} a_n \quad \forall n \\ \Rightarrow n=0 &\Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} a_0 = \frac{3}{2} \times 6 = 9 \\ \Rightarrow n=1 &\Rightarrow a_3 = \frac{4}{3} a_1 = \frac{4}{3} \times 3 = 4 \\ \Rightarrow n=2 &\Rightarrow a_4 = \frac{5}{4} a_2 = \frac{5}{4} \times 9 = \frac{45}{4} \\ \Rightarrow n=3 &\Rightarrow a_5 = \frac{6}{5} a_3 = \frac{6}{5} \times 4 = \frac{24}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots \\ \Rightarrow y &= 6 + 3(x-1) + 9(x-1)^2 + 4(x-1)^3 \\ &+ \frac{45}{4}(x-1)^4 + \frac{24}{5}(x-1)^5 + \dots \end{aligned}$$



تمرین ۹,۴. معادلات دیفرانسیل زیر را به صورت سری توانی حول نقطه داده شده حل کنید.

(الف) $(2+x^2)y'' - xy' - 3y = 0 \quad x_0 = 0$

(ب) $y'' + (x^2 - 4x + 4)y' + xy = 0 \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 1$

حال جواب‌ها را حول نقاطی بررسی می‌کنیم که نقطه عادی نیستند. یعنی ضریب y'' در x_0 صفر می‌شود مانند

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad (\text{بسل})$$

نقطه $x_0 = 0$ غیر عادی است.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad (\text{لژاندر})$$

$$1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{نقاط غیر عادی}$$

در مسائل کاربردی معمولاً جواب‌های معادله در همسایگی نقاط غیر عادی رفتار جالب‌تری دارند و لازم است که جواب در این نقاط به طور دقیقی محاسبه شوند. در نقاط غیر عادی روش ارائه شده در بخش قبل قابل استفاده نیست زیرا $\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $\frac{R(x)}{P(x)}$ را نمی‌توان به شکل سری توانی حول $x = x_0$ نوشت. ابتدا یک دسته بندی روی نقاط غیر عادی انجام می‌دهیم.

تعریف ۱۰,۴. نقطه x_0 را نقطه غیر عادی منظم برای معادله

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

(P, Q, R چندجمله‌ای) گوییم هرگاه حدهای $\frac{Q(x)}{P(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \frac{R(x)}{P(x)}$ موجود و متناهی باشند. در غیر این صورت یعنی اگر یکی از

این حدها موجود نباشد، نقطه را نقطه غیر عادی نامنظم می‌نامیم. ▲

مثال ۱۱،۴. نقاط غیر عادی منظم و نامنظم را در معادلات زیر مشخص کنید.

(الف) $x^2(1-x^2)y'' + 2xy' + 4y = 0$
 نقاط غیر عادی $x = 0, x = 1, x = -1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (x) \frac{Q(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{2x}{x^2(1-x^2)} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (x)^2 \frac{R(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{4}{x^2(1-x^2)} = 4 \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ نقطه غیر عادی منظم}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{Q(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{2x}{x^2(1-x^2)} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \frac{R(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \frac{4}{x^2(1-x^2)} = 0 \end{aligned} \right\} x = 1 \text{ نقطه غیر عادی منظم}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \frac{Q(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \frac{2x}{x^2(1-x^2)} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 \frac{R(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 \frac{4}{x^2(1-x^2)} = 0 \end{aligned} \right\} x = -1 \text{ نقطه غیر عادی منظم}$$

(ب) $y'' + \frac{x^2}{(1-x)^2}y' + 3(1+x^2)y = 0$
 نقطه غیر عادی $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \frac{x^2}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{1-x} = \infty \Rightarrow x = 1 \text{ نقطه غیر عادی نامنظم}$$

(ج) $x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$

(معادلات اوایلر که قبلا دیده‌ایم)

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ نقطه غیر عادی}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (x) \frac{Q(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\alpha x}{x^2} = \alpha \\ \lim_{x \rightarrow 0} (x)^2 \frac{R(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\beta}{x^2} = \beta \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ نقطه غیر عادی منظم}$$

▲

در ادامه به حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم حول نقطه x_0 یک نقطه غیر عادی منظم می‌پردازیم. برای راحتی $x_0 = 0$ در نظر می‌گیریم. زیرا در غیر این صورت مانند تغییر متغیر $z = x - x_0$ است.

۲,۴ روش حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی حول نقطه $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی منظم.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به فرم در حالت کلی را در نظر می‌گیریم.

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

که $P(x)$ ، $Q(x)$ و $R(x)$ توابع چند جمله‌ای هستند و $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی منظم معادله است. با تقسیم کردن طرفین معادله بر $P(x)$ داریم:

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

یا:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

که $p(x)$ و $q(x)$ توابع گویا (نسبت دو چند جمله‌ای هستند) توجه داریم که $x = 0$ نقطه غیر عادی منظم است یعنی

$$\lim_{x \rightarrow 0} xp(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x)$$

موجود و متناهی است.

روش حل. قرار می‌دهیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. y' و y'' را در معادله قرار می‌دهیم. پس از انجام محاسبات و ساده سازی مقادیر r و روابط بازگشتی a_n را به دست می‌آوریم. به این روش، روش فروبنیوس گفته می‌شود و چنین جواب‌هایی، جواب فروبنیوس نام دارد.

مثال ۲,۴. معادله $2xy'' + y' - 2y = 0$ را با استفاده از روش فروبنیوس حول نقطه $x_0 = 0$ به دست آورید.

حل: ضرب y'' را یک می‌کنیم.

$$y'' + \frac{1}{\sqrt{x}}y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad (1,4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-1}{x} = 0$$

قرار می‌دهیم $a_n \neq 0, y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

y, y' و y'' را در معادله ۱,۴ جای گذاری می‌کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$- \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r-1} = 0$$

$$n+r-1 \mapsto n+r-2$$

$$n \mapsto n-1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + \frac{1}{\sqrt{x}}(n+r)] a_n x^{n+r-2}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-2}$$

$$\text{جمله اولی } n=0 \text{ را جدا می‌کنیم } [r(r-1) + \frac{1}{\sqrt{x}}r] a_0 x^{r-2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) + \frac{1}{\sqrt{x}}(n+r)] a_n x^{n+r-2} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-2} = 0$$

$$\Rightarrow r(r-1) + \frac{1}{\sqrt{x}}r = r^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}r = r(r - \frac{1}{\sqrt{x}}) = 0 \text{ معادله شاخص}$$

$$\Rightarrow r_2 = 0, \quad r_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(n+r)(n+r - \frac{1}{\sqrt{x}})a_n - a_{n-1} = 0 \text{ رابطه بازگشتی}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n &= \frac{\gamma a_{n-1}}{(n+r)(\gamma n + \gamma r - 1)} & n \geq 1 \\ r_1 = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow a_n &= \frac{\gamma a_{n-1}}{(n+\frac{1}{\gamma})(\gamma n)} & n \geq 1 \\ a_n &= \frac{\gamma a_{n-1}}{\gamma n(\gamma n + 1)} & n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma}{\gamma!} a_0 & a_2 &= \frac{\gamma}{\gamma \times \delta} a_1 = \frac{\gamma^2}{\delta!} a_0 \\ a_0 &= 1 & a_3 &= \frac{\gamma}{\delta \times \gamma} a_2 = \frac{\gamma^3}{\gamma!} a_0 \\ \Rightarrow y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{(\gamma n + 1)!} x^{n+\frac{1}{\gamma}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 = 0 \Rightarrow a_n &= \frac{\gamma a_{n-1}}{(n)(\gamma n - 1)} & n \geq 1 \\ a_1 &= \frac{\gamma a_0}{1} & a_2 &= \frac{\gamma a_1}{\gamma \times \gamma} = \frac{\gamma^2}{\gamma!} a_0 \\ & & a_3 &= \frac{\gamma \times a_2}{\gamma \times \delta} = \frac{\gamma^3}{\gamma \times \delta \times \gamma!} a_0 \end{aligned}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\gamma a_{n-1}}{\gamma n(\gamma n - 1)} \\ \Rightarrow a_n &= \frac{\gamma^n}{\gamma n!} a_0 & a_0 &= 1 \\ \Rightarrow y_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{(\gamma n)!} x^n \\ \Rightarrow y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \text{جواب عمومی} \end{aligned}$$

▲

به حل معادله در حالت کلی برمی‌گردیم: (روش فروبنیوس)

معادله در فرم کلی $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ را در نظر می‌گیریم. $x_0 = 0$ نقطه غیر عادی منظم است. یعنی $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x p(x)$ موجود و متناهی است. به عبارت دیگر $x p(x)$ و $x^2 q(x)$ را می‌توان به صورت سری توانی حول نقطه $x_0 = 0$ نوشت. یعنی $x p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) x^n$ و $x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) x^n$ معادله را در x^2 ضرب می‌کنیم.

$$x^2 y'' + x(x p(x)) y' + (x^2 q(x)) y = 0 \quad (2, 4)$$

قرار می‌دهیم

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

y ، y' و y'' را در معادله ۲،۴ جای گذاری می‌کنیم.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

$$x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} \right) + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} \right)$$

$$+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+r) a_k x^{k+r} p_{n-k} x^{n-k} \right)$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^{k+r} q_{n-k} x^{n-k} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+r) p_{n-k} a_k \right) x^{n+r}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_{n-k} a_k \right) x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) a_n + \sum_{k=0}^n ((r+k) p_{n-k} + q_{n-k}) a_k \right] x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow [r(r-1) + r p_0 + q_0] a_0 x^r$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) a_n + [(r+n) p_0 + q_0] a_n \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} ((r+k) p_{n-k} + q_{n-k}) a_k \right] x^{n+r} = 0$$

اگر قرار دهیم $F(r) := r(r-1) + p_0 r + q_0$ رابطه بالا را می‌توانیم به این صورت

بنویسیم:

$$F(r) a_0 x^r + \sum_{n=0}^{\infty} \left[F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} ((r+k) p_{n-k} + q_{n-k}) a_k \right] x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 & \text{معادله شاخص} \\ F(r+n) a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} ((r+k) p_{n-k} + q_{n-k}) a_k & \text{رابطه بازگشتی} \end{cases}$$

در حقیقت

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (xp(x))$$

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 q(x))$$

در نتیجه از رابطه شاخص $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ مقادیر r را پیدا می‌کنیم. سپس به ازای هر r از رابطه بازگشتی $F(r+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} ((r+k)p_{n-k} + q_{n-k})a_k$ ، a_n ها را پیدا می‌کنیم.

حالت‌های مختلف:

معادله شاخص $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ یک معادله درجه دو است. در نتیجه بسته به این که ریشه‌های $F(r)$ چگونه باشند، حالت‌های مختلف پیش می‌آید.
حالت اول: $F(r)$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است $(r_2 \leq r_1)$. و تفاضل r_2 و r_1 صحیح نیست.

$$r_2 - r_1 \notin \mathbb{N}$$

حالت دوم: $F(r)$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است $r_2 \leq r_1$. و تفاضل r_2 و r_1 صحیح است.

$$r_1 - r_2 \in \mathbb{N}$$

حالت سوم: $F(r)$ دارای ریشه مضاعف $r_1 = r_2$ است.

در اینجا ما فقط حالت اول را بررسی می‌کنیم، که به ازای هر r یک جواب به فرم فروبنیوس به دست می‌آید.

مثال ۱۳،۴. معادله دیفرانسیل $(1+x)y' - 2y = 0$ را با روش استفاده از سری حول نقطه $x_0 = 0$ به دست آورید.

حل: کافی است از فرمولی که در حالت کلی به دست آوردیم استفاده کنیم. معادله شاخص و رابطه بازگشتی را به دست آوریم و سپس جواب‌های به فرم فروبنیوس را به دست آوریم. ابتدا نشان می‌دهیم $x_0 = 0$ یک نقطه غیر عادی منظم است.

$$p(x) = \frac{1+x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} xp(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1+x}{x} = 1 = p_0$$

$$q(x) = \frac{-2}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-2}{x} = 0 = q_0$$

معادله شاخص

$$\begin{aligned} F(r) &= r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + \frac{1}{2}r = 0 \\ F(r) &= r^2 - r + \frac{1}{2}r = r^2 - \frac{1}{2}r = 0 \\ \Rightarrow r(r - \frac{1}{2}) &= 0 \Rightarrow r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

رابطه بازگشتی

$$F(r+n)a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} ((r+k)p_{n-k} + q_{n-k})a_k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (r+n)(r+n-\frac{1}{2})a_n &= - [(r+n-1)\frac{1}{2} - 1] a_{n-1} \\ \Rightarrow (r+n)(2r+2n-1)a_n &= -(r+n-3)a_{n-1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = xp(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x &\Rightarrow p_0 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \dots = p_n = 0 \\ x^2 q(x) = -x &\Rightarrow q_0 = 0, \quad q_1 = -1, \quad q_2 = \dots = q_n = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (r+n)(2r+2n-1)a_n &= -(r+n-3)a_{n-1} \\ r_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2}+n)(1+2n-1)a_n &= -(\frac{1}{2}+n-3)a_{n-1} \\ \Rightarrow (2n+1)(2n)a_n &= -(2n-5)a_{n-1} \\ \Rightarrow a_n &= -\frac{2n-5}{2n(2n+1)}a_{n-1} \quad n \geq 1 \\ n = 1 \Rightarrow a_1 &= -\frac{-3}{2 \times 3}a_0 = \frac{1}{2}a_0 \\ a_2 &= -\frac{-1}{2 \times 4}a_1 = \frac{1}{2 \times 4}a_0 \end{aligned}$$

دلخواه $a_0 = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = a_0 x^{\frac{1}{2}} + a_1 x^{\frac{3}{2}} + \dots \\ y_2 &= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2 \times 4}x^{\frac{5}{2}} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 = 0 \Rightarrow n(2n-1)a_n &= -(n-3)a_{n-1} \\ a_n &= -\frac{n-3}{n(2n-1)}a_{n-1} \quad n \geq 1 \\ n = 1 \Rightarrow a_1 &= -\frac{-2}{1 \times 1}a_0 = 2a_0 \\ a_2 &= -\frac{-1}{2 \times 3}a_1 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times a_0 = \frac{1}{2}a_0 \end{aligned}$$

$a_0 = 1$ دلخواه

$$\Rightarrow y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$y_2 = 1 + 2x + \frac{1}{3}x^2 + \dots$$

▲

جمع بندی:

برای حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

که $p(x)$ و $q(x)$ توابع گویا هستند (نسبت دو چند جمله‌ای) با روش فروبنیوس حول نقطه غیر عادی منظم x_0 ، قرار می‌دهیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r}$ که r ریشه معادله شاخص

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

است. وقتی معادله شاخص دارای دو ریشه حقیقی $r_1 \leq r_2$ و $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$ هر یک از r_1 و r_2 را جداگانه در رابطه بازگشتی

$$F(r+n)a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} ((r+k)p_{n-k} + q_{n-k})a_k$$

قرار می‌دهیم و a_n ها را به دست می‌آوریم. توجه داریم که p_i ها و q_i ها در روابط بالا از بسط سری توانی $x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ و $x p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ به دست می‌آید. همچنین دقت داریم که فرمول‌های بالا برای معادله با ضریب y'' مساوی یک است.

مثال ۱۴,۴. معادله دیفرانسیل زیر را با روش فروبنیوس حول نقطه $x = 0$ حل کنید.

$$x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$$

۱. ابتدا ضریب y'' را یک می‌کنیم.

$$y'' + \frac{(x+1)}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

۲. سری توابع $xp(x)$ و $x^2q(x)$ را به دست می‌آوریم. (حول $x=0$)

$$xp(x) = x\left(\frac{x+1}{x}\right) = x+1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow p_0 = 1, p_1 = 1, p_2 = p_3 = \dots = 0$$

$$x^2q(x) = x^2\left(\frac{-1}{x^2}\right) = -1 = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow q_0 = -1, q_1 = q_2 = \dots = 0$$

۳. معادله شاخص را به دست می‌آوریم.

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + r - 1 = 0$$

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$$

$$F(r) = (r-1)(r+1)$$

۴. رابطه بازگشتی را به دست می‌آوریم.

$$F(r+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] a_k$$

$$(r+n-1)(r+n+1)a_n = -(r+n-1)p_1 a_{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{r+n+1} \quad n \geq 1$$

۵. هر یک از r_1 و r_2 را در رابطه بازگشتی قرار می‌دهیم و جواب را به دست می‌آوریم.

$$r_1 = 1 \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{n+2}$$

دلخواه $a_0 = 1$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = -\frac{a_0}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{6} = +\frac{1}{12}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_2}{8} = -\frac{1}{5 \times 4 \times 3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)!}$$

$$\Rightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)!} x^{n+1}$$

$$r_2 = -1 \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{n}$$

دلخواه $a_0 = 1$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = -\frac{a_0}{1} = -1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{2} = +\frac{1}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{1}{3 \times 2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{(n)!}$$

$$\Rightarrow y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!} x^{n-1}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$



تمرین ۱۵,۴. معادلات دیفرانسیل زیر را با روش فروبنیوس حول نقطه $x = 0$ حل کنید.

(الف) $xy'' + (2 - 2x^2)y' + 6xy = 0$

(ب) $2x^2y'' + 3xy' - (1 + x)y = 0$

(ج) $4xy'' + (3 + 3x)y = 0$

فصل ۵

دستگاه معادلات

۱,۵ مقدمه دستگاه معادلات

تعریف ۱,۵. یک ماتریس $m \times n$ ، آرایه‌ای است مستطیلی از اعداد مختلط یا حقیقی به شکل زیر

$$A = \begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

و با $A = (a_{ij})_{m \times n}$ نمایش می‌دهیم که در a_{ij} ، i شماره سطر و j شماره ستون است. ▲

• اگر $m = n$ ، آنگاه A را ماتریس مربعی می‌گوییم.

• ماتریس $1 \times m$ ماتریس ستونی نام دارد.

• ماتریس $n \times 1$ ماتریس سطری نام دارد.

• اگر برای هر i, j ، $a_{ij} = 0$ ، ماتریس صفر نام دارد.

• ماتریس $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ، ماتریس همانی نام دارد.

۲,۵ جمع و ضرب ماتریس‌ها

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_{ij})_{n \times p}$$

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \times b_{kj} \right)_{m \times p}$$

خواص جمع و ضرب ماتریس‌ها

$$A + B = B + A \quad (\text{الف})$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{ب})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha A = (\alpha a_{ij})_{mn} \quad (\text{ج})$$

$$A + (-A) = 0 \quad (\text{د})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad (\text{ه})$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \quad (\text{و})$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad (\text{ز})$$

$$AB \neq BA \quad (\text{م})$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \quad (\text{ع})$$

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C) \quad (\text{غ})$$

تعریف ۲,۵. اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد، A را وارون پذیر گوییم هرگاه یک ماتریس $n \times n$ ، B وجود داشته باشد که $AB = BA = I_n$. ماتریس B را وارون ماتریس A می‌گوییم. ▲

تعریف ۳,۵. دترمینان یک ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A = & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ & + \dots \\ & + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

به عبارت دیگر

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \begin{pmatrix} \text{ماتریس حاصل از} \\ \text{حذف سطر } i \text{ ام و} \\ \text{ستون } j \text{ ام} \end{pmatrix}$$



قضیه ۴,۵. ماتریس A وارون پذیر است اگر و فقط اگر $\det A \neq 0$.

روش یافتن وارون یک ماتریس:

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det A}, C = (c_{ij}), c_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} \text{ماتریس حاصل از} \\ \text{حذف سطر } i \text{ ام و} \\ \text{ستون } j \text{ ام} \end{pmatrix}$$

C^T ترانواده ماتریس است. یعنی جای سطرها با ستون‌ها عوض شده است.

۳,۵ دستگاه معادلات خطی

یک دستگاه خطی از n معادله و n مجهول به صورت زیر است.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

x_i ها مجهول و a_{ij} ها و b_i ها مقادیر ثابت هستند.
اگر قرار دهیم

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij})$$

در حقیقت دستگاه را می‌توان به صورت $AX = B$ نوشت. اگر $B = 0$ ، آنگاه دستگاه را همگن و اگر $B \neq 0$ دستگاه را نا همگن (غیر همگن) می‌گوییم.
در دستگاه $AX = B$ ، اگر A وارون پذیر باشد یعنی $\det A \neq 0$ ، می‌توانیم طرفین را در A^{-1} ضرب کنیم از سمت چپ و جواب دستگاه را به دست آوریم.

$$AX = B \xrightarrow{\det A \neq 0} A^{-1} \times (AX) = A^{-1} \times B \\ \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

که در اینجا اگر معادله همگن باشد یعنی $B = 0$ ، جواب منحصر به فرد دستگاه $X = 0$ است (هرگاه $\det A \neq 0$).
 ولی اگر A وارون پذیر نباشد یعنی $\det A = 0$ ، دستگاه یا اصلاً جواب ندارد یا بینهایت جواب دارد.

مثال ۵,۵. دستگاه سه معادله سه مجهول زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

فرم ماتریسی این دستگاه به شکل زیر است.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad AX = B, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = -7 + 1 + 5 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{وارون پذیر است} \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

$A^{-1} = \frac{C^T}{\det A}$ ماتریس C را به دست می‌آوریم.

$$C = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ جواب دستگاه}$$



۴,۵ استقلال خطی و وابستگی خطی

در ادامه منظور از بردار ماتریس ستونی $n \times 1$ است. فرض کنید $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ بردار باشند. یعنی

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, X^{(n)} = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

تعریف ۴,۵. n بردار $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ را وابسته خطی گوئیم هرگاه اعداد حقیقی c_1, c_2, \dots, c_n که حداقل یکی از آنها ناصفر بوده وجود داشته باشند به طوری که

$$c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \dots + c_n X^{(n)} = \circ$$

▲

در غیر این صورت، بردارها را مستقل خطی گوئیم.

به عبارت دیگر

$$c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \dots + c_n x_{1n} = \circ \\ c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \dots + c_n x_{2n} = \circ \\ \vdots \\ c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \dots + c_n x_{nn} = \circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow XC = \mathbf{0}$$

در نتیجه دستگاه دارای جواب غیر صفر است هرگاه $\det X = \mathbf{0}$.
 (یادآوری: دستگاه $AX = \mathbf{0}$ دارای جواب یکتای صفر است اگر $\det A \neq \mathbf{0}$ به طور
 معادل دارای جواب ناصفر است اگر $\det A = \mathbf{0}$)

نتیجه ۷,۵. n بردار $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ وابسته خطی هستند اگر و فقط اگر $\det X = \mathbf{0}$.

به طور معادل n بردار $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ مستقل خطی هستند اگر و فقط اگر $\det X \neq \mathbf{0}$.

مثال ۸,۵. وابستگی خطی یا استقلال خطی بردارهای زیر را بررسی کنید.

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

روش اول:

$$c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + c_3 X^{(3)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow c_2 - c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = c_3 = 0 = c_1$$

پس ضرایب غیر صفر c_1 و c_2 و c_3 وجود دارند که ترکیب خطی $X^{(1)}, X^{(2)}$ و $X^{(3)}$ را برابر صفر کنند. یعنی طبق تعریف $X^{(1)}, X^{(2)}$ و $X^{(3)}$ مستقل خطی هستند.

روش دوم:

$$X = (X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det X = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

پس $X^{(1)}$ ، $X^{(2)}$ و $X^{(3)}$ مستقل خطی است. (زیرا وقتی $\det X \neq 0$ یعنی دستگاه

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▲

$$\text{فقط جواب} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ دارد.}$$

تمرین ۹,۵. مشخص کنید بردارهای $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ و

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ مستقل خطی هستند یا وابسته خطی؟}$$

۵,۵ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

تعریف ۱۰,۵. فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. بردار ستونی ناصفر V را یک بردار ویژه برای ماتریس A می‌گوییم، هرگاه مقدار ثابت r وجود داشته باشد به طوری

که $AV = rV$. در این صورت عدد r را مقدار ویژه ماتریس A می‌گوییم. ▲

مثال ۱۱,۵. فرض کنید $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$ می‌بینیم که

$$A \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} = ۲ \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

یعنی $r = ۲$ مقدار ویژه و $V = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$ بردار ویژه نظیر مقدار ویژه $r = ۲$ برای بردار A هستند. ▲

قضیه ۱۲,۵. بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز مستقل خطی هستند.

اثبات. فرض کنید $V^{(۱)}, V^{(۲)}, \dots, V^{(k)}$ بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز r_1, r_2, \dots, r_k باشند. برای اینکه نشان دهیم $V^{(۱)}, V^{(۲)}, \dots, V^{(k)}$ مستقل خطی هستند، باید نشان دهیم اگر $c_1 V^{(۱)} + c_2 V^{(۲)} + \dots + c_k V^{(k)} = 0$ آنگاه $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. این را با استقرا روی k ثابت می‌کنیم.
پایه استقرا: $k = ۱$

$$c_1 V^{(۱)} = 0 \stackrel{V^{(۱)} \neq 0}{\Rightarrow} c_1 = 0$$

فرض استقرا: قضیه برای $k - ۱$ بردار درست است.
حکم استقرا:

$$(۱) \quad c_1 V^{(۱)} + c_2 V^{(۲)} + \dots + c_k V^{(k)} = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} c_i = 0 \quad i = ۱, \dots, k$$

$$(۱) \times A \Rightarrow c_1 AV^{(۱)} + c_2 AV^{(۲)} + \dots + c_k AV^{(k)} = 0 \\ \Rightarrow c_1 r_1 V^{(۱)} + c_2 r_2 V^{(۲)} + \dots + c_k r_k V^{(k)} = 0 \quad (۲)$$

$$(۱) \times r_1 \Rightarrow c_1 r_1 V^{(۱)} + c_2 r_1 V^{(۲)} + \dots + c_k r_1 V^{(k)} = 0 \quad (۳)$$

$$(۲) - (۳) \Rightarrow c_2 (r_2 - r_1) V^{(۲)} + \dots + c_k (r_k - r_1) V^{(k)} = 0$$

$$\stackrel{\text{فرض استقرا}}{\Rightarrow} \forall i \quad c_i (r_i - r_1) = 0$$

$$\stackrel{r_i \neq r_1}{\Rightarrow} \forall i, i = ۲, \dots, k \quad c_i = 0$$

$$(۲) \Rightarrow c_1 r_1 V^{(۱)} = 0 \stackrel{r_1 \neq 0}{\Rightarrow} c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \forall i, i = ۱, ۲, \dots, k \quad c_i = 0$$

سؤال ۱۳,۵. چگونه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس را به دست آوریم؟
 جواب: برای یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه A باید r و V را به گونه‌ای پیدا کنیم که
 $AV = rV$.

$$AV = rV \Leftrightarrow AV - rV = 0 \Rightarrow (A - rI)V = 0$$

یعنی V باید جواب ناصفر دستگاه $(A - rI)V = 0$ باشد. پس باید ماتریس $A - rI$ وارون پذیر نباشد (اگر وارون پذیر باشد، $V = 0$ نتیجه می‌شود) و این یعنی $\det(A - rI) = 0$.

نتیجه ۱۴,۵. مقدار r ، مقدار ویژه ماتریس A است اگر و فقط اگر $\det(A - rI) = 0$.
 $\det(A - rI)$ را چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A می‌نامیم.

نتیجه ۱۵,۵. برای یافتن مقادیر ویژه یک، ماتریس چند جمله‌ای مشخصه یعنی $\det(A - rI)$ را تشکیل می‌دهیم. ریشه‌های آن یعنی مقادیری که به ازای آنها $\det(A - rI) = 0$ ، مقادیر ویژه ماتریس A هستند. به ازای هر مقدار ویژه r ، جواب‌های دستگاه $(A - rI)V = 0$ بردار ویژه نظیر r هستند.

مثال ۱۶,۵. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ را بیابید.

حل:

۱. ابتدا ماتریس $A - rI$ را تشکیل می‌دهیم.

$$A - rI = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r & -2 \\ 1 & -1-r \end{pmatrix}$$

۲. چند جمله‌ای $\det(A - rI)$ را پیدا می‌کنیم.

$$\det \begin{pmatrix} 1-r & -2 \\ 1 & -1-r \end{pmatrix} = (1-r)(-1-r) + 2 = r^2 + 1.$$

۳. ریشه‌های $\det(A - rI)$ همان مقادیر ویژه A هستند.

$$\det(A - rI) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r_1 = i, r_2 = -i$$

r_1, r_2 مقادیر ویژه A هستند.

۴. به ازای هر r ، دستگاه $(A - rI)V = 0$ را حل می‌کنیم.

$$r_1 = i \Rightarrow (A - r_1 I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

معادله اول همان معادله دوم است که در $(1-i)$ ضرب شده است.

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-i)v_1 - 2v_2 = 0 \\ v_1 + (-1-i)v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = (1+i)v_2$$

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} (1+i)v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

v_2 دلخواه است. قرار می‌دهیم $v_2 = 1$.

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

نکته ۱۷,۵. اگر V بردار ویژه ماتریس A باشد، هر ضریب ثابتی از V نیز بردار ویژه A است.

$$AV = rV, \forall k \quad AkV = kAV = krV = r kV$$

$$r_2 = -i \Rightarrow \begin{cases} (1+i)v_1 - 2v_2 = 0 \\ v_1 + (-1+i)v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = (1-i)v_2$$

معادله اول همان معادله دوم است که در $(1+i)$ ضرب شده است.

$$V^{(2)} = \begin{pmatrix} v_2(1-i) \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} v_2$$

$v_2 = 1$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

▲

مثال ۱۸,۵. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل: مقادیر ویژه ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه A هستند. پس $\det(A - rI) = 0$ را حل می‌کنیم.

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} -r & 1 & -1 \\ 1 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1-r \end{vmatrix}$$

بر حسب سطر آخر بسط می‌دهیم

$$\det(A - rI) = (1-r) \begin{vmatrix} -r & 1 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = (1-r)(r^2 - 1) = 0$$

با تکرار دو
 $\Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -1$

$$r_1 = 1 \Rightarrow (A - r_1 I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 - v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \end{cases}$$

دلخواه $v_1 = 1$

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = -1 \Rightarrow (A - r_2 I)V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2 \\ 2v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 0 \end{cases}$$

دلخواه $v_1 = 1$

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▲

تمرین ۱۹,۵. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$(الف) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ب) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ج) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

۶,۵ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

یک دستگاه معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + g_1(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + g_n(t) \end{cases}$$

که در آن a_{ij} ها اعداد ثابت و g_i ها توابع پیوسته معین و x_i ها n تا تابع مجهول هستند. یک دستگاه معادله به شکل بالا را می‌توانیم به صورت زیر به فرم، ماتریسی نیز نمایش بدهیم.

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X' = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$$X' = AX + g(t)$$

در دستگاه $X' = AX + g(t)$ اگر $g(t) = 0$ ، آنگاه دستگاه را همگن و در غیر این صورت دستگاه را غیر همگن می‌نامیم.

شرط اول چنین دستگاهی $x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$ به عبارتی $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ است.

مثال ۲۰،۵. این دستگاه معادله دیفرانسیل خطی همگن است.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + x_3 & x_1(0) &= 1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 - x_3 & x_2(0) &= -1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 + x_2 + 2x_3 & x_3(0) &= 1 \end{aligned}$$

و فرم ماتریسی آن به صورت زیر است.

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

▲

۷،۵ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با استفاده از مقادیر ویژه

ابتدا دستگاه همگن $X' = AX$ را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۲۱،۵. هر ترکیب خطی از جواب‌های معادله $X' = AX$ ، جوابی از معادله است.

اثبات. فرض کنید $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots, X^{(n)}(t)$ جواب‌هایی از دستگاه $X' = AX$ باشند. ترکیب خطی $X(t) = c_1 X^{(1)}(t) + c_2 X^{(2)}(t) + \dots + c_n X^{(n)}(t)$ را در نظر

می‌گیریم و نشان می‌دهیم $X(t)$ نیز جواب دستگاه است.

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= c_1 \frac{dX^{(1)}(t)}{dt} + \dots + c_n \frac{dX^{(n)}(t)}{dt} \\ &= c_1 AX^{(1)}(t) + \dots + c_n AX^{(n)}(t) \\ &= A(c_1 X^{(1)}(t) + \dots + c_n X^{(n)}(t)) \\ &= AX(t). \end{aligned}$$



قضیه ۲۲,۵. اگر $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ جواب مستقل خطی برای دستگاه $X' = AX$ باشند، آنگاه هر جواب دستگاه را می‌توان به شکل ترکیب خطی $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ نوشت. یعنی جواب عمومی دستگاه به صورت $c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \dots + c_n X^{(n)}$ است.

نتیجه ۲۳,۵. برای حل دستگاه $X' = AX$ کافی است n جواب مستقل خطی برای دستگاه بیابیم. (n مرتبه ماتریس A است).

می‌دانیم که جواب معادله $x' = ax$ ، تابع $x(t) = e^{at}$ است. با استفاده از این سعی می‌کنیم برای دستگاه $X' = AX$ جوابی به شکل $X(t) = e^{rt}V$ بیابیم. برای این کار $X(t)$ را در دستگاه جای‌گذاری می‌کنیم و r و V را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} X(t) = e^{rt}V &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}e^{rt}V = re^{rt}V \\ X'(t) = AX(t) &\Rightarrow re^{rt}V = Ae^{rt}V \\ \Rightarrow AV = rV &\Rightarrow \text{بردار ویژه } V \text{ و مقادیر ویژه } r \end{aligned}$$

نتیجه ۲۴,۵. اگر r مقدار ویژه و V بردار ویژه ماتریس A باشد، آنگاه $X(t) = e^{rt}V$ جواب دستگاه $X' = AX$ است.

مثال ۲۵,۵. جواب عمومی دستگاه $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$ را پیدا کنید.

حل با توجه به مطالب گفته شده کافی است سه جواب مستقل خطی برای دستگاه پیدا

کنیم. برای این کار کافی است مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ضرایب را پیدا کنیم.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 \\ 1 & -r & 1 \\ 0 & 1 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r) \begin{vmatrix} -r & 1 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-r \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - rI) &= (1-r)(-r(1-r) - 1) - (1-r) \\ &= (1-r)(-r + r^2 - 1 - 1) \\ &= (1-r)(r^2 - r - 2) \\ &= (1-r)(r - 2)(r + 1) = 0 \\ &\Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 = 1 &\Rightarrow (A - r_1 I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_3 \\ v_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

دلخواه $v_1 = 1$

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(1)} = e^{r_1 t} V^{(1)} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = 2 \Rightarrow (A - r_2 I)V^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = v_3 \end{cases}$$

دلخواه $v_1 = 1$

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(2)} = e^{r_2 t} V^{(2)} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_3 = -1 \Rightarrow (A - r_3 I)V^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = v_3 \\ v_2 + 2v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_3 \end{cases}$$

دلخواه $v_1 = 1$

$$\Rightarrow V^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(3)} = e^{r_3 t} V^{(3)} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

جواب عمومی

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{-t} \\ -c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

▲

تمرین ۲۶,۵. جواب عمومی دستگاه‌های زیر را بیابید.

(الف) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ب) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$

(ج) $X' = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$

یادآوری: برای حل دستگاه معادلات همگن $X' = AX$ با استفاده از مقادیر ویژه کافی است n جواب مستقل خطی (n مرتبه ماتریس A) بیابیم. برای این منظور با قرار دادن $\det(A - rI) = 0$ ، مقادیر ویژه A و به ازای هر r ، با حل دستگاه $(A - rI)V = 0$ بردار ویژه r را پیدا می‌کنیم. به ازای هر مقدار ویژه r و بردار ویژه V نظیر r ، تابع $X = e^{rt}V$ یک جواب از دستگاه معادلات است.

حالت اول: اگر ماتریس A دارای n مقدار ویژه حقیقی متمایز باشد، (یعنی چندجمله‌ای $\det(A - rI) = 0$ ، n ریشه حقیقی متمایز داشته باشد). آنگاه به ازای هر مقدار ویژه یک جواب و در نتیجه n جواب مستقل خطی خواهیم داشت و مساله تمام است.

مثال ۲۷,۵. دستگاه $X' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$ را حل کنید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - rI = \begin{pmatrix} 1-r & 4 \\ -1 & 1-r \end{pmatrix}$$

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 1-r & 4 \\ -1 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 + 4 = r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$r = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i \quad \text{مقادیر ویژه}$$

$$r_1 = 1 + 2i \Rightarrow (A - r_1 I) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2iv_1 + 4v_2 = 0 \\ -v_1 - 2iv_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = -2iv_2$$

دلخواه $v_2 = 1$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = e^{rt}V = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

▲ جواب مختلط دستگاه اما ما به دنبال دو جواب حقیقی مستقل خطی هستیم.

قضیه ۲۸,۵. اگر $X(t) = Y(t) + iZ(t)$ جواب مختلطی از دستگاه $X' = AX$ باشد، آنگاه $Y(t)$ و $Z(t)$ جواب‌های حقیقی دستگاه هستند.

اثبات.

$$\begin{aligned} X(t) \text{ جواب است} &\Rightarrow (X(t))' = A(X(t)) \\ &\Rightarrow (Y(t) + iZ(t))' = A(Y(t) + iZ(t)) \\ &\Rightarrow Y'(t) + iZ'(t) = AY(t) + iAZ(t) \\ &\Rightarrow Y'(t) = AY(t), \quad Z'(t) = AZ(t) \end{aligned}$$

■

نتیجه ۲۹,۵. از هر جواب مختلط برای دستگاه $X' = AX$ ، دو جواب حقیقی مستقل

خطی به دست می‌آید.

حال ببینیم این دو جواب حقیقی را چگونه به دست آوریم؟
فرض کنید جواب مختلط $X(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(V^{(1)} + iV^{(2)})$ به این صورت است.

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)(V^{(1)} + iV^{(2)}) \\ &= e^{\alpha t} [(V^{(1)} \cos \beta t - V^{(2)} \sin \beta t) + i(V^{(2)} \cos \beta t + V^{(1)} \sin \beta t)] \\ &\Rightarrow Y(t) = e^{\alpha t}(V^{(1)} \cos \beta t - V^{(2)} \sin \beta t) \\ &\Rightarrow Z(t) = e^{\alpha t}(V^{(2)} \cos \beta t + V^{(1)} \sin \beta t) \end{aligned}$$

دو جواب حقیقی دست‌گناه هستند.

به مثال ۲۷,۵ باز می‌گردیم. دیدیم که $X(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$ جواب مختلط دست‌گناه است. کافی است قسمت حقیقی و قسمت موهومی $X(t)$ را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} X(t) &= e^t(\cos 2t + i \sin 2t) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ X(t) &= e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + e^t \left[\cos 2t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] i \\ X(t) &= e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right] + e^t \left[\begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \end{pmatrix} \right] i \\ X(t) &= e^t \begin{pmatrix} 2 \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} i \\ \Rightarrow Y(t) &= e^t \begin{pmatrix} 2 \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}, \quad Z(t) = e^t \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$Y(t)$ و $Z(t)$ دو جواب حقیقی مستقل

در نتیجه جواب عمومی دست‌گناه

$$\begin{aligned} &= c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2c_1 e^t \sin 2t - 2c_2 e^t \cos 2t \\ c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

مثال ۳۰,۵. دستگاه $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} X$ را حل کنید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - rI = \begin{pmatrix} -r & 1 & 0 \\ 0 & -r & 1 \\ 4 & -4 & 1-r \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - rI) &= -r \begin{vmatrix} -r & 1 \\ -4 & 1-r \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & -r \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -r(-r(1-r) + 4) - (-4) \\ &= -r^3 + r^2 - 4r + 4 \\ &= -(r-1)(r^2 + 4) = 0 \end{aligned}$$

$r = 1$ ریشه است.

$$\Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -4 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = 2i, \quad r_3 = -2i$$

$$\begin{aligned} r_1 = 1 &\Rightarrow (A - r_1 I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \\ -v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = v_3 \\ 4v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

دلخواه $v_1 = 1$

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(1)} = e^{r_1 t} V^{(1)} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = 2i \Rightarrow (A - r_2 I) V^{(2)} = \begin{pmatrix} -2i & 1 & 0 \\ 0 & -2i & 1 \\ 4 & -4 & 1 - 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2i v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 2i v_1 \\ -2i v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 2i v_2 \Rightarrow v_3 = -4 v_1 \\ 4 v_1 - 4 v_2 + (1 - 2i) v_3 = 0 \end{cases}$$

$$4 v_1 - 4(2i v_1) + (1 - 2i)(-4 v_1) = 0$$

دلخواه $v_1 = 1$

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(2)} = e^{r_2 t} V^{(2)} = e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{جواب مختلط}$$

$$\begin{aligned}
 X^{(1)}(t) &= (\cos 2t + i \sin 2t) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
 X^{(2)}(t) &= \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \left[\cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right] i \\
 X^{(3)}(t) &= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2 \sin 2t \\ -4 \cos 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2 \cos 2t \\ -4 \sin 2t \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow Y(t) &= \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2 \sin 2t \\ -4 \cos 2t \end{pmatrix}, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2 \cos 2t \\ -4 \sin 2t \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

جواب عمومی دستگاه

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 2 \sin 2t \\ -4 \cos 2t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2 \cos 2t \\ -4 \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t \\ c_1 e^t + 2c_2 \sin 2t + 2c_3 \cos 2t \\ c_1 e^t - 4c_2 \cos 2t - 4c_3 \sin 2t \end{pmatrix}$$

▲

تمرین ۳۱،۵. دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$\text{(الف)} \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X$$

$$\text{(ب)} \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X$$

حالت دوم. اگر ماتریس A دارای مقادیر ویژه مختلط $r = \alpha + i\beta$ باشد و $V = V^{(1)} + iV^{(2)}$ بردار ویژه نظیر r باشد. از جواب مختلط $X(t) = e^{rt}V$ می‌توان دو جواب حقیقی به دست آوریم.

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{\alpha+i\beta t}(V^{(1)} + iV^{(2)}) \\ &= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)(V^{(1)} + iV^{(2)}) \\ &= e^{\alpha t} [\cos \beta t V^{(1)} - \sin \beta t V^{(2)}] + i e^{\alpha t} [\cos \beta t V^{(2)} + \sin \beta t V^{(1)}] \\ \Rightarrow Y(t) &= e^{\alpha t} [\cos \beta t V^{(1)} - \sin \beta t V^{(2)}] \\ \Rightarrow Z(t) &= e^{\alpha t} [\cos \beta t V^{(2)} - \sin \beta t V^{(1)}] \end{aligned}$$

$Y(t)$ و $Z(t)$ دو جواب حقیقی مستقل حالت سوم. اگر A دارای مقدار ویژه تکراری باشد، آنگاه؟

۸,۵ مقادیر ویژه تکراری

دیدیم که اگر ماتریس A در دستگاه $X' = AX$ دارای مقدار ویژه تکراری باشد، لزوماً نمی‌توانیم n جواب به فرم $e^{rt}V$ (r مقدار ویژه و V بردار ویژه) بیابیم. در ادامه به دنبال روشی هستیم که بتوانیم به هر تعداد دلخواه جواب مستقل خطی برای دستگاه $X' = AX$ بیابیم. تابع نمایی ماتریسی:

تعریف ۳۲,۵. برای، ماتریس $n \times n$ ، A تابع نمایی ماتریسی را با e^{At} نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$e^{At} := I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$$

یادآوری: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ مشتق e^{At} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= A + tA^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \dots \\ &= A(I + tA + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \dots) \\ &= Ae^{At} \end{aligned}$$

نتیجه ۳۳,۵. برای هر بردار ثابت V ، بردار $e^{At}V$ جوابی از دستگاه $X' = AX$ است.

$$\forall V, \frac{d}{dt}(e^{At}V) = Ae^{At}V = A(e^{At}V)$$

پس می‌توانیم با انتخاب V های مناسب، به هر تعداد لازم جواب از دستگاه $X' = AX$ به فرم $e^{At}V$ دست آوریم.

در ادامه کافی است کمی بیشتر با شکل توابع $e^{At}V$ و محاسبات آنها آشنا شویم. خواص تابع e^{At} :

$$e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As} \quad ۱.$$

$$(e^{A(t)})^{-1} = e^{-At} \quad ۲.$$

$$e^{At+Bt} = e^{At} \cdot e^{Bt} \Leftrightarrow AB = BA \quad ۳.$$

$$e^{(rI)t} = e^{rt}I \quad ۴.$$

دلیل (۴)

$$e^{(rI)t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (rI)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(rt)^n}{n!} I^n = e^{rt}I$$

حال نشان می‌دهیم چگونه به هر تعداد لازم جواب مستقل خطی برای دستگاه $X' = AX$ با استفاده از تابع e^{At} به دست آوریم. دیدیم که برای هر بردار ثابت دلخواه V ، جواب دستگاه است. برای هر عدد حقیقی $r \in \mathbb{R}$ روابط زیر را در نظر می‌گیریم.

$$e^{At}V = e^{(A-rI)t+rIt}V \stackrel{\text{خاصیت ۳}}{=} e^{(A-rI)t}e^{rIt}V \quad \text{خاصیت ۴}$$

$$\Rightarrow e^{At}V = e^{rt}e^{(A-rI)t}V \quad (۱,۵)$$

حال بردار $e^{(A-rI)t}V$ را بیشتر بررسی می‌کنیم.

$$e^{(A-rI)t}V = \left[I + t(A-rI) + \dots + \frac{t^m}{m!}(A-rI)^m + \dots \right] V$$

اگر V را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $(A-rI)^m V = 0$ ، آنگاه داریم:

$$e^{(A-rI)t}V = \left[I + t(A-rI) + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-rI)^{m-1} \right] V$$

در نتیجه به ازای این V جواب $e^{At}V$ به فرم زیر خواهد بود.

$$1,5 \Rightarrow e^{At}V = e^{rt} \left[V + t(A-rI)V + \dots + \frac{t^{(m-1)}}{(m-1)!}(A-rI)^{(m-1)}V \right]$$

۱. اگر V یک بردار ویژه و r مقدار ویژه باشد، یعنی $(A-rI)V = 0$ آنگاه $e^{At}V = e^{rt}V$ می‌بینیم که جواب‌های قبلی هم از این روش به دست می‌آیند. حالت سوم.

۲. اگر r مقدار ویژه تکراری و مثلاً با تکرار k باشد و تعداد جواب‌های مستقل خطی کمتر از n تا باشد، آنگاه نیاز به جواب‌های بیشتری داریم. این کار را با V ‌های مناسب انجام می‌دهیم. اگر V را به گونه‌ای انتخاب کنیم که

$$(A-rI)^2 V = 0, \quad (A-rI)V \neq 0$$

آنگاه از فرمول $e^{At}V$ خواهیم داشت:

$$e^{At}V = e^{rt} [V + t(A-rI)V]$$

و این یک جواب دیگر از دستگاه است. اگر هنوز به جواب مستقل نیاز داشته باشیم، V را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$(A-rI)^3 V = 0, \quad (A-rI)^2 V \neq 0$$

در نتیجه جواب دیگر از فرمول $e^{At}V$ به صورت زیر خواهد بود.

$$e^{At}V = e^{rt} \left[V + t(A - rI)V + \frac{t^2}{2!}(A - rI)^2V \right]$$

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - rI = \begin{pmatrix} 1-r & 1 & 1 \\ 0 & 1-r & -1 \\ 0 & 0 & 1-r \end{pmatrix}$$

$$\det(A - rI) = (1-r) \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 0 & 1-r \end{vmatrix}$$

بر حسب ستون اول بسط می‌دهیم

$$\det(A - rI) = (1-r)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

مقدار ویژه با تکرار سه

$$r_1 = 1 \Rightarrow (A - r_1I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_3 = 0 \\ -v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 0 \end{cases}$$

$v_1 = 1$ دلخواه

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{(1)} = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

نیاز به دو جواب مستقل خطی دیگر داریم. ابتدا دستگاه $(A - rI)^2V = 0$ را حل

می‌کنیم.

$$(A - rI)^2 = \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \circ$$

v_1, v_2 دلخواه

برای این که با $V^{(1)}$ مستقل باشد، باید $(A - rI)v^{(2)} \neq \circ$. دلخواه $v_2 = 1, v_1 = \circ$.

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = e^{At}V^{(2)} = e^t \left[\begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix} \right]$$

$$x^{(2)} = e^t \left[\begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix}$$

نیاز به یک جواب دیگر داریم. پس $V^{(3)}$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که

$$(A - rI)^3 V^{(3)} = \circ, \quad (A - rI)^2 V^{(3)} \neq \circ$$

$$(A - rI)^3 V^{(3)} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ دلخواه}$$

قرار می‌دهیم $v_1 = v_2 = v_3$

$$\Rightarrow V^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X^{(3)}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{t^2}{2!} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + c_3 X^{(3)}$$

$$X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{t^2}{2!} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t (1 + 2t + \frac{t^2}{2!}) \\ c_2 e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

تمرین ۳۴,۵.

$$(الف) \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} X$$

$$(ب) \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} X$$

۹,۵ دستگاه معادله غیر همگن

تا اینجا دیدیم که چگونه n جواب مستقل خطی برای دستگاه معادلات $X' = AX$ (n مرتبه A است) به دست آوریم.

تعریف ۳۵,۵. اگر $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ جواب مستقل خطی برای دستگاه $X' = AX$ باشد، آنگاه ماتریس اساسی جواب دستگاه عبارتست از ماتریس $n \times n$ که هر ستون آن یکی از جواب‌های دستگاه است. یعنی $\psi = (X^{(1)} \ X^{(2)} \ \dots \ x^{(n)})$. ▲

دیدیم که جواب عمومی دستگاه به صورت

$$X(t) = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \dots + c_n X^{(n)}$$

است. به بیان دیگر جواب عمومی دستگاه به صورت زیر است. که $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$$X(t) = \psi(t)C$$

حال دستگاه معادله غیر همگن $X' = AX + g(t)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $X_p(t)$ یک جواب خاص از این دستگاه باشد، آنگاه برای هر جواب دلخواه $X(t)$ از این دستگاه داریم:

$$\begin{aligned} (X - X_p)'(t) &= X'(t) - X_p'(t) = AX(t) + g(t) - AX_p(t) - g(t) \\ \Rightarrow (X - X_p)'(t) &= A(X - X_p)(t). \end{aligned}$$

نتیجه ۳۶,۵. تفاضل هر دو جواب دستگاه غیر همگن $X' = AX + g(t)$ ، جوابی از دستگاه همگن $X' = AX$ است.

نتیجه ۳۷,۵. جواب عمومی دستگاه غیر همگن $X' = AX + g(t)$ به صورت مجموع جواب عمومی دستگاه همگن به اضافه یک جواب خاص از دستگاه غیر همگن است به عبارت دیگر

$$X(t) = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \dots + c_n X^{(n)} + X_p$$

که $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ ، n جواب مستقل خطی از دستگاه همگن $X' = AX$ و $X_p(t)$ یک جواب خاص از دستگاه غیر همگن $X' = AX + g(t)$ است.

بنابراین برای یافتن جواب عمومی دستگاه غیر همگن، کافی است بتوانیم یک جواب خاص از دستگاه $X' = AX + g(t)$ بیابیم.

۱۰,۵ روش تغییر پارامتر:

در این روش قرار می‌دهیم

$$X_p(t) = U_1(t)X^{(1)}(t) + \dots + U_n(t)X^{(n)}(t)$$

که $X^{(i)}$ ها جواب‌های دستگاه $X' = AX$ هستند و $U_i(t)$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که $X_p(t)$ در دستگاه $X' = AX + g(t)$ صدق کند. به عبارت دیگر

$$X_p(t) = \psi(t)U(t)$$

که $\psi(t)$ ماتریس اساسی جواب و $U(t) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$ است. برای اینکه X_p در دستگاه

صدق کند باید

$$X_p' = AX_p + g(t)$$

پس باید

$$\psi'(t)U(t) + \psi(t)U'(t) = A\psi(t)U(t) + g(t)$$

اما می‌دانیم که

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \begin{pmatrix} X^{(1)'} & \dots & X^{(n)'} \end{pmatrix} = A\psi(t) \\ \Rightarrow A\psi(t)U(t) + \psi(t)U'(t) &= A\psi(t)U(t) + g(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(t)U'(t) = g(t) \quad (۲,۵)$$

یعنی برای یافتن U_1, \dots, U_n کافی است دستگاه ۲,۵ را حل کنیم تا U'_1, \dots, U'_n به دست آید و سپس U_1, \dots, U_n را به دست آوریم. به عبارت دیگر از آنجا $\det \psi(t) \neq 0$ وارون پذیر است. پس در حقیقت داریم

$$U'(t) = \psi^{-1}(t)g(t)$$

مثال ۳۸,۵. جواب عمومی دستگاه $X' = \begin{pmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ را بیابید.
حل: ابتدا دستگاه همگن $X' = \begin{pmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix} X$ را حل می‌کنیم.

$$A = \begin{pmatrix} -۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{pmatrix} \Rightarrow A - rI = \begin{vmatrix} -۲-r & ۳ \\ -۱ & ۲-r \end{vmatrix}$$

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} -۲-r & ۳ \\ -۱ & ۲-r \end{vmatrix} = (-۲-r)(۲-r) + ۳ = r^2 - ۱ = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = 1, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = -1$$

$$r_1 = 1 \Rightarrow (A - r_1I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} -۳ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۳v_1 + ۳v_2 = 0 \\ -v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 = 1 \text{ دلخواه}$$

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = -1 \Rightarrow (A - r_2 I)V^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + 3v_2 = 0 \\ -v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 3v_2 \text{ دلخواه } v_2 = 1$$

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)} = e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه ماتریس اساسی جواب $\psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$ است. کافی است یک جواب خاص برای دستگاه غیر همگن بیابیم. با استفاده از روش تغییر پارامتر قرار می‌دهیم $X_p = \psi(t)U(t)$ و دیدیم که:

$$\begin{pmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^t U_1' + 3e^{-t} U_2' = e^t \\ e^t U_1' + e^{-t} U_2' = e^{-t} \end{cases}$$

U_1' و U_2' را با روش کرامر به دست می‌آوریم.

$$U_1' = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{1-3e^{-2t}}{1-3} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

$$\Rightarrow U_1(t) = \int \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right) dt = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}e^{-2t}$$

$$U_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^t \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix}}{1-3} = \frac{1-e^{2t}}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$\Rightarrow U_2(t) = \int \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}\right) dt = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t}$$

در نتیجه

$$X_p = \psi(t)U(t) = \begin{pmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4}e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$X_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^t t - \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{3}{4}te^{-t} + \frac{3}{4}e^t \\ -\frac{1}{2}e^t t - \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{4}e^t \end{pmatrix}$$

$$X_p = \begin{pmatrix} e^t\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t\right) - e^{-t}\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}t\right) \\ e^t\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t\right) - e^{-t}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}t\right) \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \psi(t)C + \psi(t)U$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t\right) - e^{-t}\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}t\right) \\ e^t\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t\right) - e^{-t}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}t\right) \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} + e^t\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t\right) + e^{-t}\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}t\right) \\ c_1 e^t + c_2 e^{-t} + e^t\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t\right) - e^{-t}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}t\right) \end{pmatrix} \quad \text{جواب عمومی دستگاه}$$

▲

نکته ۳۹،۵. جواب عمومی دستگاه غیر همگن

$$X(t) = \psi(t)C + \psi(t)U(t) = \psi(t)(C + U(t))$$

دستگاه معادلات $\psi(t)U(t)$ جواب خاص $\psi(t)C$ جواب عمومی همگن

مثال ۴۰،۵. دستگاه $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ را حل کنید.

حل: ابتدا دستگاه همگن $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} X$ را حل می‌کنیم. (تمرین ب)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - rI = \begin{vmatrix} 1-r & 0 & 0 \\ 0 & 2-r & -3 \\ 0 & 1 & -2-r \end{vmatrix}$$

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 1-r & 0 & 0 \\ 0 & 2-r & -3 \\ 0 & 1 & -2-r \end{vmatrix} = (1-r) \begin{vmatrix} 2-r & -3 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix}$$

$$\det(A - rI) = (1-r)[(2-r)(-2-r) + 3] = (1-r)(r^2 - 1) = 0$$

$\Rightarrow r = 1, \quad r^2 = 1 \Rightarrow r_1 = -1, \quad r_2 = 1$ با تکرار دو

$$r_1 = -1 \Rightarrow (A - r_1 I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v_1 = 0 \\ 3v_2 - 3v_3 = 0 \Rightarrow v_2 = v_3 = 1 \text{ دلخواه} \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = e^{r_1 t} V^{(1)} = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$r_2 = 1 \Rightarrow (A - r_2 I) V^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 - 3v_3 = 0 \\ v_2 = 3v_3, v_2 = v_3 = 0 \text{ دلخواه } v_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)} = e^{r_2 t} V^{(2)} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

یک جواب دیگر لازم داریم. دستگاه $(A - r_2 I)^2 V = 0$ را حل می‌کنیم.

$$r_2 = 1 \Rightarrow (A - I)^2 V^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2v_2 + 6v_3 = 0 \\ v_2 = 3v_3, \text{ دلخواه } v_1 \end{cases}$$

باید دقت کنیم $(A - I)V^{(۳)} \neq 0$.

$$v_1 = 0 \text{ دلخواه } v_3 = 1 \Rightarrow v_2 = 3, V^{(۳)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(۳)}(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

ماتریس اساسی جواب $\psi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ e^{-t} & 0 & 3e^t \\ e^{-t} & 0 & e^t \end{pmatrix}$ است.

جواب عمومی دستگاه همگن

$$X_h = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + c_3 X^{(3)} = \psi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$X_h = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ e^{-t} & 0 & 3e^t \\ e^{-t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

برای یک جواب خاص باید U را بیابیم که

$$X_p(t) = \psi(t)U(t)$$

و

$$\psi(t)U'(t) = g(t)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ e^{-t} & 0 & 3e^t \\ e^{-t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^t U'_1 = e^t \\ e^{-t} U'_1 + 3e^t U'_1 = e^{-t} \Rightarrow U'_1 = 1 \Rightarrow U_1(t) = t \\ e^{-t} U'_1 + e^t U'_1 = e^{2t} \end{cases}$$

$$U'_1 = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & 3e^t \\ e^{2t} & e^t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & 3e^t \\ e^{-t} & e^t \end{vmatrix}} = \frac{1-3e^{3t}}{1-3} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{3t}$$

$$\Rightarrow U_1(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$U'_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{-t} & e^{2t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-t} & 3e^t \\ e^{-t} & e^t \end{vmatrix}} = \frac{e^t - e^{-2t}}{1-3} = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$\Rightarrow U_2(t) = -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$X_p = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ e^{-t} & 0 & 3e^t \\ e^{-t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ t \\ -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = X_h + X_p = \psi(t)C + \psi(t)U$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 0 \\ e^{-t} & 0 & 3e^t \\ e^{-t} & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{3t} \\ c_2 + t \\ c_3 - \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$$

▲

تمرین ۵، ۴۱. دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$(الف) X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$(ب) \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \sin 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}$$

$$(ج) \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{3t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$(د) \quad X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ e^t \end{pmatrix}$$

۱۱,۵ یک روش محاسبه برای تابع e^{At}

قضیه ۴۲,۵. اگر $\psi(t)$ ماتریس اساسی جواب برای دستگاه $X' = AX$ باشد، آنگاه

$$e^{At} = \psi(t)\psi^{-1}(0).$$

اثبات. قرار می‌دهیم $F(t) = e^{-At}\psi(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t) &= -Ae^{-At}\psi(t) + e^{-At}\psi'(t), \quad \psi' = A\psi \\ &= -Ae^{-At}\psi(t) + Ae^{-At}\psi(t) \\ &= 0 \Rightarrow F(t) = C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(0) &= e^{-A \cdot 0}\psi(0) = \psi(0) \\ \Rightarrow e^{-At}\psi(t) &= \psi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-At})^{-1} = e^{At} &\Rightarrow e^{At}\psi(0) = \psi(t) \\ \Rightarrow e^{At} &= \psi(t)\psi^{-1}(0). \end{aligned}$$

■

نتیجه ۴۳,۵. برای محاسبه تابع e^{At} ، کافی است دستگاه همگن $X' = AX$ را حل کنیم و ماتریس اساسی جواب آن را به دست آوریم. $e^{At} = \psi(t)\psi^{-1}(0)$.

تمرین ۴۴,۵. برای ماتریس‌های زیر تابع e^{At} را به دست آورید.

$$(الف) \quad A = \begin{pmatrix} -۲ & ۱ \\ -۵ & ۴ \end{pmatrix}$$

$$(ب) \quad A = \begin{pmatrix} ۴ & ۶ & ۶ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & -۴ & -۳ \end{pmatrix}$$

$$(ج) \quad A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۴ \end{pmatrix}$$

فصل ۶

پاسخ تمرین‌ها

۱,۶ حل تمرین‌های فصل اول

۱,۱,۶ پاسخ تمرین؟؟

معادله $(x^2 y \ln y + xy^2 - y \sin x)dx + (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 y + y^2 \cos y)dy = 0$ را حل کنید.

$$M(x, y) = x^2 y \ln y + xy^2 - y \sin x \Rightarrow M_y = x^2 \ln y + x^2 + 2xy - \sin x$$

$$N(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 y + y^2 \cos y \Rightarrow N_x = x^2 + xy$$

$M_y \neq N_x$ معادله کامل نیست.

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{x^2 \ln y + x^2 + 2xy - \sin x - x^2 - xy}{-(x^2 y \ln y + xy^2 - y \sin x)} = R(y) = \frac{-1}{y}$$

در نتیجه معادله دارای عامل انتگرال ساز است و

$$\mu(y) = e^{\int R(y)dy}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-1}{y} dy} = e^{\ln y^{-1}} = \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} \times \frac{1}{y} &\Rightarrow \frac{1}{y}(x^{\nu} \ln y + xy - \sin x)dx + \left(\frac{1}{\nu} \frac{x^{\nu}}{y} + \frac{1}{\nu} x^{\nu} + y \cos y\right)dy = 0 \\ &\Rightarrow M(x, y) = x^{\nu} \ln y + xy - \sin x \Rightarrow M_y = \frac{x^{\nu}}{y} + x \\ &\Rightarrow N(x, y) = \frac{1}{\nu} \frac{x^{\nu}}{y} + \frac{1}{\nu} x^{\nu} + y \cos y \Rightarrow N_x = \frac{x^{\nu}}{y} + x \end{aligned}$$

$M_y = N_x$ معادله کامل است.

$$\begin{aligned} \exists \psi(x, y) \quad \psi_x &= x^{\nu} \ln y + xy - \sin x \quad (1) \\ \psi_y &= \frac{1}{\nu} \frac{x^{\nu}}{y} + \frac{1}{\nu} x^{\nu} + y \cos y \quad (2) \end{aligned}$$

از (۱) انتگرال می‌گیریم بر حسب x

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\nu} x^{\nu} \ln y + \frac{1}{\nu} x^{\nu} y + \cos x + h(y)$$

مشتق گیری بر حسب y

$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi_y &= \frac{1}{\nu} \frac{x^{\nu}}{y} + \frac{1}{\nu} x^{\nu} + h'(y) \\ &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{\nu} \frac{x^{\nu}}{y} + \frac{1}{\nu} x^{\nu} + y \cos y \\ \Rightarrow h'(y) &= y \cos y \\ \Rightarrow h(y) &= \int y \cos y dy \\ y = u &\Rightarrow dy = du \\ \cos y dy &= dv \Rightarrow \sin y = v \\ \Rightarrow h(y) &= y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y \\ \Rightarrow \psi(x, y) &= \frac{1}{\nu} x^{\nu} \ln y + \frac{1}{\nu} x^{\nu} y + \cos x + y \sin y + \cos y = c. \end{aligned}$$

$\psi(x, y)$ جواب عمومی معادله است.

پاسخ تمرین ۲، ۱، ۶؟؟

$$\sin y(x + \sin y)dx + 2x^2 \cos y dy = 0$$

$$\begin{aligned} \sin y = u &\Rightarrow \cos y dy = du \\ &\Rightarrow u(x + u) + 2x^2 u' = 0 \\ &\Rightarrow u' + \frac{1}{x}u = -\frac{1}{2x^2}u^2 \quad \text{برنولی} \\ \times u^{-2} &\Rightarrow u^{-2}u' + \frac{1}{x}uu^{-2} = -\frac{1}{2x^2} \\ u^{-1} = z &\Rightarrow -u^{-2}u' = z' \\ &\Rightarrow -z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2x^2} \\ &\Rightarrow z' - \frac{1}{x}z = \frac{1}{2x^2} \\ &\Rightarrow \mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = x^{-1} \\ &\Rightarrow x^{-1}z' - \frac{1}{x^2}z = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{d(x^{-1}z)}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\ &\Rightarrow x^{-1}z = \int \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx = -\frac{1}{x}x^{-\frac{1}{2}} + c \\ &\Rightarrow z = -\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + cx^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

پاسخ تمرین ۳، ۱، ۶؟؟

$$\text{معادله } (-3x + 6xy) + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{2y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \text{ را حل کنید.}$$

$$(-3x^2y + 6x^2y^2)dx + (x^3 + 3y^2)dy = 0$$

$$\begin{aligned} M(x, y) = -3x^2y + 6x^2y^2 &\Rightarrow M_y = -3x^2 + 12x^2y \\ N(x, y) = x^3 + 3y^2 &\Rightarrow N_x = 3x^2 \end{aligned} \Rightarrow M_y \neq N_x$$

معادله کامل نیست.

$$R(y) = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-3x^2 + 12x^2y - 3x^2}{3x^2y - 6x^2y} = \frac{-2}{y}$$

در نتیجه معادله دارای عامل انتگرال ساز است و

$$\mu(y) = e^{\int R(y)dy}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-r}{y} dy} = y^{-r}$$

$$\times y^{-r} \Rightarrow (-rx^r y^{-1} + rx^r)dx + \left(\frac{x^r}{y^r} + r\right)dy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} M(x, y) &= -\frac{rx^r}{y} + rx^r \Rightarrow M_y = \frac{rx^r}{y^2} \\ N(x, y) &= \frac{x^r}{y^r} + r \Rightarrow N_x = \frac{rx^r}{y^r} \end{aligned} \Rightarrow M_y = N_x$$

معادله کامل است.

$$\exists \psi(x, y) \quad \begin{aligned} \psi_x &= -\frac{rx^r}{y} + rx^r & (1) \\ \psi_y &= \frac{x^r}{y^r} + r & (2) \end{aligned}$$

$$\psi(x, y) = -\frac{x^r}{y} + rx^r + h(y)$$

$$\Rightarrow \psi_y = \frac{x^r}{y^r} + h'(y)$$

$$= \frac{x^r}{y^r} + r$$

$$\Rightarrow h'(y) = r$$

$$\Rightarrow h(y) = ry$$

$$\Rightarrow \psi(x, y) = -\frac{x^r}{y} + rx^r + ry = c.$$

$$(-3x + 6xy) + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{2y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\begin{aligned} -3xx' + 6xyx' + \frac{x^2}{y} + \frac{2y}{x} &= 0 \\ x' - 2yx' - \frac{x}{3y} - \frac{y}{x^2} &= 0 \\ (1 - 2y)x' - \frac{1}{3y}x &= yx^{-2} \\ \Rightarrow x' - \frac{1}{3y(1-2y)}x &= \frac{y}{1-2y}x^{-2} \quad \text{برنولی} \\ x^2x' - \frac{1}{3y(1-2y)}x^3 &= \frac{y}{1-2y} \\ x^3 = z \Rightarrow 3x^2x' &= z' \\ \frac{z'}{3} - \frac{1}{3y(1-2y)}z &= \frac{y}{1-2y} \\ \Rightarrow z' - \frac{1}{y(1-2y)}z &= \frac{3y}{1-2y} \\ \mu(y) = e^{-\int \frac{dy}{y(1-2y)}} &= \frac{1}{y} - 2 \\ \Rightarrow \frac{d\left(\left(\frac{1}{y} - 2\right)z\right)}{dy} &= \frac{1-2y}{y} \times \frac{3y}{1-2y} = 3 \\ \left(\frac{1}{y} - 2\right)z &= 3y + c \\ \left(\frac{1}{y} - 2\right)x^3 &= 3y + c \\ \frac{1-2y}{y}x^3 &= 3y + c \\ x^3 - 2yx^3 &= 3y^2 + cy \\ \Rightarrow -\frac{x^3}{y} + 2x^3 + 3y &= c. \end{aligned}$$

۴, ۱, ۶ پاسخ تمرین ۴۶, ۱

$$\begin{aligned} (x - \sqrt{xy})y' &= y \\ \Rightarrow y' &= \frac{y}{x - \sqrt{xy}} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \sqrt{\frac{y}{x}}} \quad \text{معادله همگن} \\ z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' &= z + xz' \\ \Rightarrow z + xz' &= \frac{z}{1 - \sqrt{z}} \quad \text{بازنویسی} \\ \Rightarrow xz' &= \frac{z}{1 - \sqrt{z}} - z \\ \Rightarrow xz' &= \frac{z - z + z\sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} = \frac{z\sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} \quad \text{معادله جدا شدنی} \\ \Rightarrow dz\left(\frac{1 - \sqrt{z}}{z\sqrt{z}}\right) &= \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int \left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - \frac{1}{z}\right)dz &= \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int z^{-\frac{3}{2}} dz - \ln z &= \ln x + c \\ \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{z}} - \ln z &= \ln x + c \\ \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{\frac{y}{x}}} - \ln \frac{y}{x} &= \ln x + c. \end{aligned}$$

۵, ۱, ۶ پاسخ تمرین ۵, ۱

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{1}{2} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{y}{x}} \quad \text{همگن}$$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz$$

$$\Rightarrow y' = z + xz'$$

$$\Rightarrow z + xz' = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2z}$$

$$\Rightarrow xz' = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2z} \quad \text{(الف)}$$

$$\Rightarrow xz' = -\frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$\Rightarrow \frac{2z}{z^2 + 1} dz = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2z}{z^2 + 1} dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(1 + z^2) = -\ln x + c_1$$

$$\Rightarrow 1 + z^2 = -cx$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{y^2}{x^2} = -cx.$$

$$\text{(ب)} \quad (x - 3y + 3)dx - (2x - 6y + 1)dy = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y + 3}{2x - 6y + 1}$$

حالت دوم $ae = bd$ اتفاق افتاده است.

$$z = x - 3y \Rightarrow z' = 1 - 3y'$$

تغییر متغیر

$$\Rightarrow y' = \frac{1 - z'}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - z'}{3} = \frac{z + 3}{2z + 1}$$

$$\Rightarrow z' = 1 - \frac{2z + 9}{2z + 1}$$

$$\Rightarrow z' = \frac{-z - 8}{2z + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2z + 1}{z + 8} dz = dx$$

$$\Rightarrow \frac{2z + 16 - 16}{z + 8} dz = dx$$

$$\Rightarrow (2 - \frac{16}{z + 8}) dz = dx$$

انتگرال گیری

$$\Rightarrow \int (2 - \frac{16}{z + 8}) dz = \int dx$$

$$\Rightarrow 2z - 16 \ln(z + 8) = x + c$$

$$\Rightarrow 2(x - 3y) - 16 \ln|x - 3y + 8| = x + c.$$

۶, ۱, ۶ پاسخ تمرین ۵۳, ۱

$$yy' \sin x = \cos x (\sin x - y')$$

$$\Rightarrow z = y' \Rightarrow z' = y y'$$

تغییر متغیر

$$\Rightarrow \frac{1}{y} z' \sin x = \cos x (\sin x - z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} z' \sin x + (\cos x)z = \cos x \cdot \sin x$$

معادله خطی مرتبه اول

$$\Rightarrow z' + \frac{\cos x}{\sin x} z = \cos x$$

$$(الف) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} = e^{\ln(\sin x)} = (\sin x)$$

$$\Rightarrow (\sin x) z' + \sin x \cos x \cdot z = \cos x \cdot (\sin x)$$

$$\Rightarrow \frac{d(\sin^2 x \cdot z)}{dx} = \cos x (\sin x)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x \cdot z = \int \cos x \sin^2 x dx$$

$$\sin x = u, \Rightarrow \cos x dx = du$$

$$\Rightarrow \sin^2 x \cdot y' = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + c = \frac{1}{3} \sin^3 x + c.$$

$$(1 + y') + (x - e^{\tan^{-1} y}) y' = 0$$

$$z = \tan^{-1} y \Rightarrow z' = \frac{y'}{1+y^2}$$

تغییر متغیر

$$\Rightarrow 1 + (x - e^z) \frac{y'}{1+y^2} = 0$$

بازنویسی

$$\Rightarrow 1 + (x - e^z) z' = 0$$

$$\times \frac{dx}{dz} = x'$$

برای تغییر نقش

$$(ب) \Rightarrow x' + x - e^z = 0$$

خطی مرتبه اول

$$\Rightarrow \mu(z) = e^{\int dz} = e^z$$

$$\Rightarrow e^z x' + e^z x = e^{2z}$$

$$\Rightarrow \frac{d(e^z x)}{dz} = e^{2z}$$

انتگرال گیری

$$\Rightarrow e^z x = \int e^{2z} dz = \frac{1}{2} e^{2z} + c$$

$$\Rightarrow e^{\tan^{-1} y} x = \frac{1}{2} e^{\tan^{-1} y} + c.$$

$$xy' = e^{-xy} - y$$

$$\Rightarrow z = xy \Rightarrow z' = y + xy'$$

تغییر متغیر

$$(ج) \Rightarrow y + xy' = e^{-xy}$$

$$\Rightarrow z' = e^{-z} \Rightarrow e^{-z} dz = dx$$

$$\Rightarrow -e^{-z} = x + c \Rightarrow -e^{-xy} = x + c.$$

$$\begin{aligned}
 y' &= xy + 2y \ln y \\
 \Rightarrow z = \ln y &\Rightarrow z' = \frac{y'}{y} && \text{تغییر متغیر} \\
 \Rightarrow \frac{y'}{y} &= x + 2 \ln y \\
 \Rightarrow z' &= x + 2z \Rightarrow z' - 2z = x \\
 \Rightarrow \mu(x) &= e^{-\int 2 dx} = e^{-2x} \\
 \Rightarrow d(e^{-2x} z) &= x e^{-2x} dx \\
 \Rightarrow e^{-2x} z &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + c \\
 \Rightarrow e^{-2x} \ln y &= -\frac{1}{2} e^{-2x} + c.
 \end{aligned}$$

(د)

۷, ۱, ۶ پاسخ تمرین ۵۷, ۱

(الف)

$$xy' + y = 2y'x \ln y \quad y(1) = e$$

نسبت به y خطی نیست. ولی نسبت به x برنولی است. تغییر نقش می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
 \times \frac{dx}{dy} &\Rightarrow x + y \frac{dx}{dy} = 2x^2 \ln y \\
 &\Rightarrow y \frac{dx}{dy} + x = 2 \ln y x^2 \\
 \times x^{-2} &\Rightarrow y x^{-2} \frac{dx}{dy} + x^{-1} = 2 \ln y \\
 z = x^{-1} &\Rightarrow z' = \frac{-1}{x^2} \frac{dx}{dy} \\
 &\Rightarrow -y z' + z = 2 \ln y \Rightarrow z' - \frac{1}{y} z = -\frac{2 \ln y}{y} \\
 &\Rightarrow \mu(y) = e^{-\int \frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y} \\
 &\Rightarrow \frac{d(\frac{1}{y} z)}{d(y)} = \frac{1}{y} z' - \frac{1}{y^2} z = -2 \ln y \times \frac{1}{y} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{y} z = -2 \int \frac{\ln y}{y^2} dy \\
 \ln y = u &\Rightarrow y = e^u, \frac{dy}{y} = du \\
 &\Rightarrow \frac{1}{y} z = -2 \int e^{-u} u du = -2(-u e^{-u} - e^{-u}) + c && \text{جزء به جزء} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{y} x^{-1} = -2(-\ln y \times \frac{1}{y} - \frac{1}{y}) + c && \text{جای‌گذاری متغیرها} \\
 y(1) = e &\Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = e \end{matrix} \Rightarrow && c \text{ را پیدا کنید}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & xy'(x - 1 + xe^y) = 1 \\
 & \Rightarrow x^2 y' - xy' + x^2 e^y y' = 1 && \text{تغییر نقش می‌دهیم} \\
 \times \frac{dx}{dy} & \Rightarrow x^2 - x + x^2 e^y = \frac{dx}{dy} \\
 \text{بازنویسی} & \Rightarrow \frac{dx}{dy} + x = (1 + e^y)x^2 && \text{معادله برنولی} \\
 & \Rightarrow z = x^{-1} \Rightarrow x^{-2} \frac{dx}{dy} + x^{-1} = 1 + e^y \\
 \text{(ب)} & \Rightarrow z' = -x^2 x' \Rightarrow -z' + z = 1 + e^y \\
 & \Rightarrow z' - z = -1 - e^y && \text{خطی مرتبه اول} \\
 & \Rightarrow \mu(y) = e^{-\int dy} = e^{-y} \\
 & \Rightarrow \frac{d(e^{-y}z)}{dy} = e^{-y}z' - e^{-y}z = -e^{-y} - 1 && \text{انتگرال گیری} \\
 & \Rightarrow e^{-y}z = e^{-y} - y + c \\
 & \Rightarrow e^{-y}x^{-1} = e^{-y} - y + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ydx - (2xy - e^{2y})dy = 0 \\
 & \Rightarrow y \frac{dx}{dy} - 2xy + e^{2y} = 0 \\
 \text{(ج)} & \Rightarrow \frac{dx}{dy} - 2x = -\frac{1}{y}e^{2y} \\
 & \Rightarrow \mu(y) = e^{-\int 2dy} = e^{-2y} \\
 & \Rightarrow \frac{d(e^{-2y}x)}{dy} = -\frac{1}{y} \\
 & \Rightarrow e^{-2y}x = -\ln y + c.
 \end{aligned}$$

۸, ۱, ۶ حل تمرین‌های مروری داده شده از فصل اول

$$\begin{aligned}
 & xdy = (x^2 y^2 (1 + e^x) - y)dx \\
 \div dx & \Rightarrow xy' + y = x^2 (1 + e^x) y^2 && \text{معادله برنولی} \\
 \times y^{-2} & \Rightarrow xy^{-2} y' + y^{-1} = x^2 (1 + e^x) \\
 y^{-1} = z & \Rightarrow -y^{-2} y' = z' \\
 & \Rightarrow -xz' + z = x^2 (1 + e^x) \\
 \text{(الف)} & \Rightarrow z' - \frac{1}{x}z = -x(1 + e^x) \\
 & \Rightarrow \mu(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x} \\
 & \Rightarrow \frac{1}{x}z' - \frac{1}{x^2}z = -1 - e^x \\
 & \Rightarrow d\left(\frac{1}{x}z\right) = (-1 - e^x)dx \\
 & \Rightarrow \frac{1}{x}z = -x - e^x + c \\
 & \Rightarrow y^{-1} = -x^2 - xe^x + cx.
 \end{aligned}$$

(ب)

$$ye^y = (y^3 + 2xe^y)y'$$

با تغییر نقش متغیر وابسته و مستقل معادله خطی می‌شود.

$$\begin{aligned} \times \frac{dx}{dy} &\Rightarrow ye^y \frac{dx}{dy} = y^3 + 2xe^y \\ &\Rightarrow ye^y \frac{dx}{dy} - 2e^y x = y^3 && \text{خطی مرتبه اول} \\ &\Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2 e^{-y} \\ &\Rightarrow \mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = y^{-2} \\ &\Rightarrow \frac{d(y^{-2}x)}{dy} = y^{-2} \frac{dx}{dy} - 2y^{-3}x = e^{-y} \\ \text{انتگرال گیری} &\Rightarrow y^{-2}x = \int e^{-y} dy = -e^{-y} + c \\ &\Rightarrow x = -y^2 e^{-y} + cy^2. \end{aligned}$$

(ج)

$$(xy + y^2)dx + (xy - x^2)dy = 0$$

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) &= xy + y^2 \Rightarrow M_y = x + 2y \\ N(x, y) &= xy - x^2 \Rightarrow N_x = y - 2x \\ R(y) &= \frac{M_y - N_x}{M} = \frac{x + 2y - y + 2x}{xy + y^2} \end{aligned} \right\} \text{این روش جواب ندارد!}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y' = \frac{-xy - y^2}{xy - x^2} && \text{بازنویسی معادله} \\ \times \frac{1}{x^2} &\Rightarrow y' = \frac{-\frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x} - 1} && \text{معادله همگن} \\ z = \frac{y}{x} &\Rightarrow y = xz && \text{تغییر متغیر} \\ &\Rightarrow y' = z + xz', \quad z + xz' = \frac{-z - z^2}{z - 1} \\ &\Rightarrow xz' = \frac{-z - z^2 - z^2 + z}{z - 1} \\ &\Rightarrow \frac{z-1}{z^2} dz = -\frac{dx}{x} && \text{معادله جدشدنی} \\ &\Rightarrow (-\frac{1}{z} z^{-1} - \frac{1}{z^2}) dz = -\frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{z} \ln z + \frac{1}{z} = -\ln x + c \\ &\Rightarrow -\frac{1}{z} \ln \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -\ln x + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2xyy' + (1+x)y' = e^x \\
 & y' = z \Rightarrow 2yy' = z' \quad \text{تغییر متغیر} \\
 \Rightarrow & xz' + (1+x)z = e^x \quad \text{خطی مرتبه اول} \\
 \Rightarrow & z' + \frac{1+x}{x}z = \frac{e^x}{x} \\
 \Rightarrow & \mu(x) = e^{\int \frac{1+x}{x} dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot e^{dx} = xe^x \\
 (د) \quad \xrightarrow{\times \mu} & xe^x z' + (1+x)e^x z = e^{2x} \\
 \Rightarrow & \frac{d(xe^x z)}{dx} = e^{2x} \\
 \Rightarrow & xe^x z = \frac{1}{2}e^{2x} + c \quad \text{انتگرال گیری} \\
 \Rightarrow & z = \frac{1}{2}x^{-1}e^x + cx^{-1}e^{-x} \\
 \Rightarrow & y' = \frac{1}{2}x^{-1}e^x + cx^{-1}e^{-x}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y' + (x' - xy + y')y' = 0 \\
 \Rightarrow & y' = -\frac{y'}{x' - xy + y'} = -\frac{(\frac{y}{x})'}{1 - (\frac{y}{x}) + (\frac{y}{x})'} \\
 \frac{y}{x} = z & \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz' \quad \text{معادله همگن} \\
 \Rightarrow & z + xz' = \frac{-z'}{1-z+z'} \\
 \Rightarrow & xz' = \frac{z'}{1-z+z'} - z \\
 (ه) \quad xz' & = \frac{-z' - z + z' - z'}{1-z+z'} = -\frac{z'}{1-z-z'} \quad \text{جداشدنی} \\
 \Rightarrow & \frac{1-z-z'}{z'} dz = -\frac{dx}{x} \\
 \Rightarrow & \int \frac{1}{z'} dz - \int \frac{1}{z'} dz - \int \frac{dz}{z} = -\ln x + c \\
 \Rightarrow & -\frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} - \ln z = -\ln x + c \\
 \Rightarrow & -\frac{1}{2}\frac{x'}{y'} + \frac{x}{y} - \ln \frac{y}{x} = -\ln x + c.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (2 + 2x'y^{\frac{1}{2}})ydx + (x'y^{\frac{1}{2}} + 2)xdy = 0 \\
 & M(x, y) = (2 + 2x'y^{\frac{1}{2}})y \Rightarrow M_y = 2 + 3x'y^{\frac{1}{2}} \\
 & N(x, y) = (x'y^{\frac{1}{2}} + 2)x \Rightarrow N_x = 3x'y^{\frac{1}{2}} + 2 \quad \Rightarrow \text{معادله کامل است} \\
 \Rightarrow & \exists \psi(x, y) \quad \psi_x = 2y + 2x'y^{\frac{1}{2}} \\
 & \psi_y = x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 2x \quad (1) \\
 (س) \quad \Rightarrow & \psi = 2xy + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} + h(y) \\
 \Rightarrow & \psi_y = 2x + x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} + h'(y) \stackrel{(1)}{=} x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 2x \\
 \Rightarrow & h'(y) = 0 \\
 \Rightarrow & h(y) = c_1 \\
 \Rightarrow & \psi(x, y) = 2xy + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = c.
 \end{aligned}$$

$$(x - y \ln y + y \ln x)dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$$

$$(x - y \ln \frac{y}{x})dx + x \ln \frac{y}{x} dy = 0$$

$$y' = \frac{-x + y \ln \frac{y}{x}}{x \ln \frac{y}{x}} = \frac{-1 + \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}}{\ln \frac{y}{x}} \quad \text{همگن است}$$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz$$

$$\Rightarrow y' = z + xz', \quad z + xz' = \frac{-1 + z \ln z}{\ln z}$$

$$(ج) \Rightarrow xz' = \frac{-1 + z \ln z}{\ln z} - z$$

$$\Rightarrow xz' = \frac{-1 + z \ln z - z \ln z}{\ln z}$$

جداشدنی است

$$\Rightarrow \ln z dz = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \ln z dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow z \ln z - z = -\ln x + c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = -\ln x + c.$$

$$ydx + (2x - xy + 2)dy = 0$$

$$M = y \Rightarrow M_y = 1$$

$$N = 2x - xy + 2 \Rightarrow N_x = 2 - y$$

$$R(y) = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1 - 2 + y}{-y} = \frac{-y + 1}{y} = -1 + \frac{1}{y}$$

$$\mu(y) = e^{\int R(y)dy} = e^{\int (-1 + \frac{1}{y})dy}$$

عامل انتگرال ساز بر حسب y

$$\mu(y) = ye^{-y}$$

$$(ج) y^2 e^{-y} dx + (2x - xy + 2)ye^{-y} dy = 0$$

معادله $\times ye^{-y}$

$$M(x, y) = y^2 e^{-y}$$

$$\Rightarrow M_y = 2ye^{-y} - y^2 e^{-y}$$

$$N(x, y) = (2x - xy + 2)ye^{-y}$$

$$\Rightarrow N_x = 2ye^{-y} - y^2 e^{-y}$$

$$\Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$$

معادله کامل است

$$\Rightarrow \exists \psi(x, y) \begin{cases} \psi_x = y^2 e^{-y} & (1) \\ \psi_y = 2xye^{-y} - xy^2 e^{-y} + 2ye^{-y} & (2) \end{cases}$$

از (۱) انتگرال گیری می‌کنیم نسبت به x

$$\Rightarrow \psi(x, y) = \int y^2 e^{-y} dx = y^2 e^{-y} x + h(y)$$

از ψ نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\psi_y = 2ye^{-y}x - y^2e^{-y}x + h'(y)$$

$$(2) \Rightarrow 2ye^{-y}x - y^2e^{-y}x + h'(y) = 2xye^{-y} - xy^2e^{-y} + 2ye^{-y}$$

$$\Rightarrow h'(y) = 2ye^{-y}$$

$$h(y) = \int 2ye^{-y} dy = -2ye^{-y} + 2 \int e^{-y} dy = -2ye^{-y} - 2e^{-y}$$

$$\Rightarrow \psi(x, y) = y^2e^{-y}x - 2ye^{-y} - 2e^{-y} = c.$$

$$2yy' + y^2 \sin x - \sin x = 0$$

$$z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$$

$$\Rightarrow z' + \sin x z = \sin x$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \sin x dx} = e^{-\cos x}$$

$$\Rightarrow e^{-\cos x} z' + \sin x e^{-\cos x} z = \sin x e^{-\cos x}$$

(س)

$$\Rightarrow \frac{d(e^{-\cos x} z)}{dx} = \sin x e^{-\cos x}$$

$$\Rightarrow e^{-\cos x} z = \int \sin x e^{-\cos x} dx$$

$$-\cos x = u \Rightarrow \sin x dx = du$$

$$\Rightarrow e^{-\cos x} z = \int e^u du = e^u + c$$

$$\Rightarrow e^{-\cos x} y^2 = e^{-\cos x} + c.$$

تغییر متغیر

خطی مرتبه اول

۲,۶ پاسخ تمرین‌های فصل دوم

۱,۲,۶ پاسخ تمرین ۶۷,۲

(الف)

$$2xy'' + (1 - 4x)y' + (2x - 1)y = e^x$$

قدم اول حل معادله همگن نظیر یعنی:

$$2xy'' + (1 - 4x)y' + (2x - 1)y = 0$$

مجموع ضرایب y'' ، y' و y صفر است. در نتیجه $y_1 = e^x$ یک جواب از معادله است. جواب دوم بالا را با استفاده از روش کاهش مرتبه به دست می‌آوریم.

$$y_2 = v(x)y_1 = v(x)e^x$$

$$v'(x) = \frac{1}{v} e^{-\int p(x)dx}$$

دقت: باید ضریب y'' را برابر یک کنیم. پس معادله به شکل $p(x) = \frac{1-4x}{2x}$ و $y'' + \frac{(1-4x)}{2x}y' + \frac{(2x-1)}{2x}y = 0$

$$v'(x) = \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int \frac{1-4x}{2x} dx} = \frac{1}{e^{2x}} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x}$$

$$v'(x) = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow v(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y_2 = 2x^{\frac{1}{2}} e^x$$

$$\Rightarrow c_1 e^x + c_2 e^x x^{\frac{1}{2}} \text{ جواب عمومی معادله همگن}$$

قدم دوم یافتن یک جواب از معادله غیر همگن حال با استفاده از روش تغییر پارامتر قرار می‌دهیم

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 e^x + u_2 x^{\frac{1}{2}} e^x$$

$$u_1' = \frac{-g y_2}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2' = \frac{g y_1}{W(y_1, y_2)}$$

دقت: برای $g(x)$ در فرمول بالا باید ضریب y'' یک باشد. پس داریم

$$y'' + \frac{(1-4x)}{2x}y' + \frac{(2x-1)}{2x}y = g(x) = \frac{1}{2}x^{-1}e^x$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & x^{\frac{1}{2}}e^x \\ e^x & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^x + x^{\frac{1}{2}}e^x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{2x} + x^{\frac{1}{2}}e^{2x} - x^{\frac{1}{2}}e^{2x}$$

$$\Rightarrow W(y_1, y_2) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_1' &= \frac{-\frac{1}{x}e^{-x} \times 2x^{\frac{1}{2}}e^x}{\frac{1}{x}x^{-\frac{1}{2}}e^{2x}} = -2 \\ u_1 &= -2x \\ \Rightarrow u_2' &= \frac{\frac{1}{x}x^{-1}e^x \times e^x}{\frac{1}{x}x^{-\frac{1}{2}}e^{2x}} = x^{-\frac{1}{2}} \\ u_2 &= 2x^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 = -2xe^x + 2x^{\frac{1}{2}} \times 2x^{\frac{1}{2}}e^x \\ y_p &= 2xe^x \\ y &= c_1e^x + c_2x^{\frac{1}{2}}e^x + 2xe^x \quad \text{جواب عمومی} \end{aligned}$$

(ب)

$$x^2y'' + 7xy' + 5y = 12x$$

قدم اول حل معادله $x^2y'' + 7xy' + 5y = 0$ این یک معادله اویلر است و دیدیم که با تغییر متغیر $z = \ln x$ به معادله با ضرایب ثابت زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dz} + \beta y = 0$$

معادله شاخص

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$$

دقت: ضریب y^1 یک است و $\alpha = 7$ و $\beta = 5$.

$$r^2 + 6r + 5 = 0 \Rightarrow (r + 1)(r + 5) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = -1, \quad r_2 = -5$$

$$y_1 = e^{-z}, \quad y_2 = e^{-5z}$$

$$y_1 = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}, \quad y_2 = e^{-5 \ln x} = \frac{1}{x^5}$$

قدم دوم: یافتن یک جواب از معادله غیر همگن

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = u_1x^{-1} + u_2x^{-5}$$

$$u_1' = \frac{-gy_2}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2' = \frac{gy_1}{W(y_1, y_2)}$$

دقت: برای قرار دادن g در فرمول‌های بالا ضریب y'' باید یک باشد. پس

$$g(x) = \frac{12x}{x^7} = 12x^{-6}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-5} \\ -x^{-2} & -5x^{-6} \end{vmatrix} = -5x^{-7} + x^{-7} = -4x^{-7}$$

$$u_1' = \frac{-12x^{-1} \times x^{-5}}{-4x^{-7}} = 3x \Rightarrow u_1 = \frac{3}{2}x^2$$

$$u_2' = \frac{12x^{-1} \times x^{-1}}{-4x^{-7}} = 3x^5 \Rightarrow u_2 = \frac{3}{6}x^6$$

$$y_p = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^6 x^{-5} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x = 2x$$

جواب عمومی $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-5} + 2x$

۲,۲,۶ پاسخ تمرین ۷۴,۲

یادآوری

$$ay'' + by' + cy = g(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x \\ \text{یا} \\ e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x \end{cases}$$

فرم کلی یک جواب خاص به صورت زیر است.

$$y_p = x^s e^{\alpha x} [\cos \beta x (A_0 x^n + \dots + A_n) + \sin \beta x (B_0 x^n + \dots + B_n)].$$

n مرتبه چند جمله‌ای در $g(x)$ است.

$s = 0$ اگر $\alpha + i\beta$ ریشه معادله شاخص $ar^2 + br + c = 0$ نباشد.

$s = 1$ اگر $\alpha + i\beta$ ریشه معادله شاخص با تکرار یک باشد.

$s = 2$ اگر $\alpha + i\beta = 0$ ریشه معادله شاخص با تکرار دو (ریشه مضاعف) باشد.

$$y'' + 9y = 36x \cos 3x + 2e^x \sinh x$$

$$\Rightarrow r^2 + 9 = 0$$

(الف)

$$\Rightarrow r^2 = -9 \Rightarrow r = \pm 3i$$

$$g(x) = 36x \cos 3x + 2e^x \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 36x \cos 3x + e^{2x} - 1$$

معادله شاخص

$$(۱) \quad \begin{aligned} y'' + ۹y &= ۳e^x \cos ۳x, & \alpha = ۰, \beta = ۳, n = ۱ & \Rightarrow \text{ریشه است } s = ۱ \\ & & \alpha + i\beta = ۳i & \\ y_{p_1} &= x^s e^{\alpha x} [\cos ۳x(Ax + B) + \sin ۳x(Cx + D)] \\ \Rightarrow y_{p_1} &= x [\cos ۳x(Ax + B) + \sin ۳x(Cx + D)] \end{aligned}$$

$$(۲) \quad \begin{aligned} y'' + ۹y &= e^{۲x}, & \alpha = ۲, \beta = ۰, n = ۰ & \Rightarrow \text{ریشه نیست } s = ۰ \\ & & \alpha + i\beta = ۲ & \\ y_{p_1} &= e^{۲x} [\cos ۰x(E) + \sin ۰x(F)] = Ee^{۲x} \end{aligned}$$

$$(۳) \quad \begin{aligned} y'' + ۹y &= -۱, & \alpha = ۰, \beta = ۰, n = ۰ & \Rightarrow \text{ریشه نیست } s = ۰ \\ & & \alpha + i\beta = ۰ & \\ y_{p_1} &= G \end{aligned}$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = G + Ee^{۲x} + x(\cos ۳x(Ax + B) + \sin ۳x(Cx + D)).$$

$$(ب) \quad \begin{aligned} y'' - ۲y' + ۳y &= x^۳ + e^x \cos ۲x + (\sin \sqrt{۲}x) \sinh x \\ \Rightarrow r^۲ - ۲r + ۳ &= ۰ & \text{معادله شاخص} \\ \Rightarrow r^۲ = ۱ - \sqrt{۱ - ۳} &\Rightarrow r = ۱ - \sqrt{۲}i \end{aligned}$$

$$(۱) \quad \begin{aligned} y'' - ۲y' + ۳y &= x^۳, & \alpha = ۰, \beta = ۰, n = ۳ & \Rightarrow \text{ریشه نیست } s = ۰ \\ & & \alpha + i\beta = ۰ & \\ y_{p_1} &= Ax^۳ + Bx^۲ + Cx + D \end{aligned}$$

$$(۲) \quad \begin{aligned} y'' - ۲y' + ۳y &= e^x \cos ۲x, & \alpha = ۱, \beta = ۲, n = ۰ & \Rightarrow \text{ریشه نیست } s = ۰ \\ & & \alpha + i\beta = ۱ + ۲i & \\ y_{p_1} &= e^x [E \cos ۲x + F \sin ۲x] \end{aligned}$$

$$(۳) \quad \begin{aligned} y'' - ۲y' + ۳y &= \frac{۱}{۲} e^x \sin \sqrt{۲}x, & \alpha = ۱, \beta = \sqrt{۲}, n = ۰ & \Rightarrow \text{ریشه است } s = ۱ \\ & & \alpha + i\beta = ۱ + i\sqrt{۲} & \\ y_{p_1} &= xe^x (G \cos \sqrt{۲}x + H \sin \sqrt{۲}x) \end{aligned}$$

$$(۴) \quad \begin{aligned} y'' - ۲y' + ۳y &= \frac{۱}{۲} e^{-x} \sin \sqrt{۲}x, & \alpha = -۱, \beta = \sqrt{۲}, n = ۰ & \Rightarrow \text{ریشه نیست } s = ۰ \\ & & \alpha + i\beta = -۱ + i\sqrt{۲} & \\ y_{p_1} &= e^{-x} (I \cos \sqrt{۲}x + J \sin \sqrt{۲}x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'' + 2y' + 2y &= e^x \sin^2 \frac{x}{2} \cosh 2x = e^x \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right) \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} e^{3x} + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{4} e^{3x} \cos x - \frac{1}{4} e^{-x} \cos x \\
 \Rightarrow r^2 + 2r + 2 &= 0 && \text{معادله شاخص} \\
 \Rightarrow r &= -1 \pm i
 \end{aligned}$$

- (ج) (۱) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{4} e^{3x}, \alpha = 3, \beta = 0, n = 0 \Rightarrow s = 0$ ریشه نیست
 $\alpha + i\beta = 3$
 $y_{p1} = Ae^{3x}$
- (۲) $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{4} e^{-x}, \alpha = -1, \beta = 0, n = 0 \Rightarrow s = 0$ ریشه نیست
 $\alpha + i\beta = -1$
 $y_{p2} = Be^{-x}$
- (۳) $y'' + 2y' + 2y = -\frac{1}{4} e^{3x} \cos x, \alpha = 3, \beta = 1, n = 0 \Rightarrow s = 0$ ریشه نیست
 $\alpha + i\beta = 3 + i$
 $y_{p3} = e^{3x}(C \cos x + D \sin x)$
- (۴) $y'' + 2y' + 2y = -\frac{1}{4} e^{-x} \cos x, \alpha = -1, \beta = 1, n = 0 \Rightarrow s = 1$ ریشه است
 $\alpha + i\beta = -1 + i$
 $y_{p4} = xe^{-x}(E \cos x + F \sin x)$

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} + y_{p4} = \dots$$

(د) $y'' + 2y' + 5y = 2e^{-x} \sin^2 x = 2e^{-x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)$
 $\Rightarrow r^2 + 2r + 5 = 0$ معادله شاخص
 $\Rightarrow r = -1 \pm 2i$

- (۱) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}, \alpha = -1, \beta = 0, n = 0 \Rightarrow s = 0$ ریشه نیست
 $\alpha + i\beta = -1$
 $y_{p1} = Ae^{-x}$
- (۲) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \cos 2x, \alpha = -1, \beta = 2, n = 0 \Rightarrow s = 1$ ریشه است
 $\alpha + i\beta = -1 + 2i$
 $y_{p2} = xe^{-x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = Ae^{-x} + xe^{-x}(B \cos 2x + C \sin 2x).$$

$$\begin{aligned}
 y'' - 2y' + 5y &= 2x^2 e^x \cos^2 x + 1 = 2x^2 e^x \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) \\
 (5) \quad \Rightarrow r^2 - 2r + 5 &= 0 && \text{معادله شاخص} \\
 \Rightarrow r = 1 \pm 2i &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y'' - 2y' + 5y &= x^2 e^x, \quad \alpha = 1, \beta = 0, n = 2 \Rightarrow \text{ریشه نیست } s = 0 \\
 & \alpha + i\beta = 1 \\
 y_{p1} &= e^x (Ax^2 + Bx + C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y'' - 2y' + 5y &= x^2 e^x \cos 2x, \quad \alpha = 1, \beta = 2, n = 2 \Rightarrow \text{ریشه است } s = 1 \\
 & \alpha + i\beta = 1 + 2i \\
 y_{p2} &= x e^x (\cos 2x (Ex^2 + Fx + G) + \sin 2x (Hx^2 + Ix + J))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad y'' - 2y' + 5y &= 1, \quad \alpha = 0, \beta = 0, n = 0 \Rightarrow \text{ریشه نیست } s = 0 \\
 & \alpha + i\beta = 0 \\
 y_{p3} &= K
 \end{aligned}$$

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3} = \dots$$

دقت کنید، اگر در این مسائل جواب عمومی معادله خواسته شود باید به y_p جواب عمومی معادله همگن را نیز اضافه کنیم.

۳,۶ حل تمرین‌های فصل سوم

۱,۳,۶ پاسخ تمرین ۴۵,۳

قسمت (ب)

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\left[\int_0^x e^{-\lambda t} \frac{1-e^{-t}}{t} dt\right] \\ & \int_0^x e^{-\lambda t} \frac{1-e^{-t}}{t} dt = f(x) \Rightarrow \\ f'(x) &= e^{-\lambda x} \frac{1-e^{-x}}{x} = \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x - x}}{x} \quad \text{قضیه اساسی حساب} \\ \mathcal{L}[f'(x)] &= s\mathcal{L}[f(x)] - f(0) \quad f(0) = 0 \quad ۲۶,۳ \Rightarrow \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \mathcal{L}[f'(x)] \times \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}[f'(x)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x - x}}{x}\right] \\ &= \int_s^\infty \mathcal{L}[e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x - x}] du \quad ۴۰,۳ \\ \mathcal{L}[f'(x)] &= \int_s^\infty \left(\frac{1}{u+\lambda} - \frac{1}{u+\lambda+1}\right) du \\ &= \ln \left| \frac{u+\lambda}{u+\lambda+1} \right| \Bigg|_s^\infty \\ \mathcal{L}[f'(x)] &= \ln \left| \frac{s+\lambda}{s+\lambda+1} \right| \Rightarrow \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{s} \ln \left| \frac{s+\lambda}{s+\lambda+1} \right|. \end{aligned}$$

۲,۳,۶ پاسخ تمرین ۶۴,۳

قسمت (ب)

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ \cos \sqrt{2}x & x \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ f(x) &= \sin x (U_0(x) - U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x)) + \cos \sqrt{2}x U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \\ f(x) &= \sin x + U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \cos \sqrt{2}x - U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \sin x \\ f(x) &= \sin x + U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \cos(\sqrt{2}(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}})) - U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \sin(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}) \\ f(x) &= \sin x + U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \cos \sqrt{2}(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}) \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} - U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \sin \sqrt{2}(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ &\quad - U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \sin(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}) \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} - U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \cos(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}}) \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \mathcal{L}[\sin x] + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}[U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \cos \sqrt{2}(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}})] - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \mathcal{L}[U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \sin \sqrt{2}(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}})] \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \mathcal{L}[U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \sin(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}})] - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{L}[U_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}(x) \cos(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}})] \Rightarrow \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}s} \frac{s}{s^2+4} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}s} \frac{2}{s^2+4} \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}s} \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}s} \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

۳,۳,۶ پاسخ تمرین ۳,۳

قسمت (ب)

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 1$$

$$\mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-x}] \quad ۱۶,۳$$

$$s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 3s\mathcal{L}[y] + 3y(0) + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s+1}$$

قرار می‌دهیم $c_1 := y(0)$ و $c_2 := y'(0)$.

$$(s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}[y] - (s - 3)c_1 - c_2 = \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s+1} + c_2 + (s - 3)c_1$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)} + \frac{c_2}{s^2 - 3s + 2} + \frac{(s-3)c_1}{s^2 - 3s + 2}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

تفکیک کسر اول

$$\Rightarrow A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = \frac{1}{6}$$

$$\frac{c_1 s + c_2 - 3c_1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2}$$

تفکیک کسر دوم و سوم

$$\Rightarrow D = 2c_1 - c_2, \quad E = c_2 - c_1$$

حالا از رابطه

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)} + \frac{c_2}{s^2 - 3s + 2} + \frac{(s-3)c_1}{s^2 - 3s + 2}$$

لاپلاس وارون می‌گیریم.

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_1 s - 3c_1 + c_2}{s^2 - 3s + 2}\right]$$

با توجه به تفکیک کسرهای انجام شده، خواهیم داشت.

$$y = \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$+ (2c_1 - c_2)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + (c_2 - c_1)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$y = \frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{6}e^x + \frac{1}{6}e^{2x} + (2c_1 - c_2)e^x + (c_2 - c_1)e^{2x}$$

$$y = \frac{1}{6}e^{-x} + (2c_1 - c_2 - \frac{1}{6})e^x + (c_2 - c_1 + \frac{1}{6})e^{2x}$$

شرایط اولیه $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$ را اعمال می‌کنیم تا c_1 و c_2 را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} y(2) &= \frac{1}{e}e^{-2} + (2c_1 - c_2 - \frac{1}{e})e^2 + (c_2 - c_1 + \frac{1}{e})e^4 = 0 \\ y'(x) &= -\frac{1}{e}e^{-x} + (2c_1 - c_2 - \frac{1}{e})e^x + 2(c_2 - c_1 + \frac{1}{e})e^{2x} \\ y'(2) &= -\frac{1}{e}e^{-2} + (2c_1 - c_2 - \frac{1}{e})e^2 + 2(c_2 - c_1 + \frac{1}{e})e^4 = 1 \end{aligned}$$

دو معادله دو مجهول را حل می‌کنیم و c_1 و c_2 را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} (2e^2 - e^4)c_1 + (e^4 - e^2)c_2 = \frac{1}{e}e^2 - \frac{1}{e}e^{-2} - \frac{1}{e}e^4 \\ (2e^2 - 2e^4)c_1 + (2e^4 - e^2)c_2 = \frac{1}{e}e^2 + \frac{1}{e}e^{-2} - \frac{2}{e}e^4 \end{cases}$$

قسمت (ج)

$$y'' + y' - 2y = x \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[x]$$

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + s\mathcal{L}[y] - y(0) - 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + s - 2)\mathcal{L}[y] - 2(s + 1) = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 + s - 2)\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2} + 2s + 2 = \frac{1 + 2s^2 + 2s^3}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2s^3 + 2s^2 + 1}{s^2(s^2 + s - 2)}$$

$$\frac{2s^3 + 2s^2 + 1}{s^2(s^2 + s - 2)} = \frac{2s^3 + 2s^2 + 1}{s^2(s-1)(s+2)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s^2}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{5}{4}, \quad C = \frac{1}{12}, \quad D = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{5}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^x + \frac{1}{12}e^{-2x} - \frac{1}{4}x$$

پاسخ تمرین ۴,۳,۶؟؟

قسمت (۴)

$$\begin{aligned}
 y(x) &= x - \int_0^x e^{x-t} y(t) dt \\
 \mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[\int_0^x e^{(x-t)} y(t) dt] \\
 \mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[x] - \mathcal{L}[e^x * y(x)] \quad ?? \\
 \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2} - \mathcal{L}[e^x] \times \mathcal{L}[y] \\
 \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-1} \mathcal{L}[y] \\
 \mathcal{L}[y] \left(1 + \frac{1}{s-1}\right) &= \frac{1}{s^2} \\
 \mathcal{L}[y] \left(\frac{s}{s-1}\right) &= \frac{1}{s^2} \\
 \mathcal{L}[y] &= \frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \\
 y &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \\
 y &= x - \frac{x}{2}.
 \end{aligned}$$

پاسخ تمرین ۵,۳,۶؟؟

قسمت (۴)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[x^2 e^{-2x} \cos^2 4x] &= \mathcal{L}\left[x^2 e^{-2x} \frac{1+\cos 8x}{2}\right] \\
 &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} x^2 e^{-2x}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \cos 8x\right]
 \end{aligned}$$

می‌دانیم که $\mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$ (خاصیت ۴۸,۳) همچنین

$$\mathcal{L}[x^2 f(x)] = \frac{d^2}{ds^2} F(s) \quad \text{(خاصیت ۳۱,۳)}$$

در نتیجه با استفاده از این دو خاصیت داریم:

$$\begin{aligned}
 L &= \mathcal{L}[x^2]_{s \rightarrow s+2} + \frac{1}{2} \mathcal{L}[x^2 \cos \lambda x]_{s \rightarrow s+2} \\
 L &= \frac{1}{2} \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[\cos \lambda x]_{s \rightarrow s+2} \\
 \mathcal{L}[\cos \lambda x] &= \frac{s}{s^2 + 64} \Rightarrow \\
 \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 64} \right) &= \frac{s^2 + 64 - 2s^2}{(s^2 + 64)^2} \\
 \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[\cos \lambda x] &= \frac{d}{ds} \left[\frac{64 - s^2}{(s^2 + 64)^2} \right] \\
 &= \frac{-2s(s^2 + 64)^2 - 2s(s^2 + 64)(64 - s^2)}{(s^2 + 64)^4} \quad \text{ساده سازی} \\
 \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[\cos \lambda x] &= \frac{2s^2 - 384s}{(s^2 + 64)^3} \Rightarrow \\
 L &= \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{(s+2)^2 - 192(s+2)}{((s+2)^2 + 64)^2}.
 \end{aligned}$$

۶,۳,۶ پاسخ تمرین ۸,۳

قسمت (ج)

$$y'' + 2y' + y = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 5 \\ \delta(x - 6) & x \geq 5 \end{cases} \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
 s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 2s \mathcal{L}[y] - 2y(0) + \mathcal{L}[y] &= F(s) \\
 (s^2 + 2s + 1) \mathcal{L}[y] &= F(s)
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 5 \\ \delta(x - 6) & x \geq 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(x) &= 2(U_0(x) - U_5(x)) + \delta(x - 6)U_5(x) \\
 F(s) &= \mathcal{L}[f(x)] = \frac{2}{s} - 2 \frac{e^{-5s}}{s} + \mathcal{L}[\delta(x - 6)U_5(x)] \\
 \Rightarrow F(s) &= \frac{2}{s} - 2 \frac{e^{-5s}}{s} + e^{-6s}U_5(6) \\
 \mathcal{L}[\delta(x - 6)U_5(x)] &\stackrel{?}{=} e^{-6s}U_5(6) \quad \text{دلیل اینکه}
 \end{aligned}$$

طبق قضیه‌ای می‌دانیم که

$$\int_0^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

پس

$$\mathcal{L}[\delta(x-\epsilon)U_{\Delta}(x)] = \int_0^{\infty} \delta(x-\epsilon)e^{-sx}U_{\Delta}(x)dx = e^{-\epsilon s}U_{\Delta}(\epsilon)$$

اما $U_{\Delta}(\epsilon) = 1$ پس در نهایت داریم از تساوی $(s^2 + 2s + 1)\mathcal{L}[y] = F(s)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{(s^2+2s+1)} \left(\frac{2}{s} - \frac{2e^{-\Delta s}}{s} + e^{-\epsilon s} \right) \\ s^2 + 2s + 1 &= (s+1)^2 \\ \frac{1}{s(s+1)^2} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} \\ \Rightarrow A &= 1, \quad B = -1, \quad C = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\Delta s}}{s(s+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\epsilon s}}{(s+1)^2}\right] \\ y &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] \\ &\quad - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\Delta s}}{s}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\Delta s}}{s+1}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\Delta s}}{(s+1)^2}\right] \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\epsilon s}}{(s+1)^2}\right] \\ y &= 2 - 2e^{-x} - 2e^{-x}x - 2U_{\Delta}(x) - 2U_{\Delta}(x)e^{-(x-\Delta)} \\ &\quad - 2U_{\Delta}(x)e^{-(x-\Delta)}(x-\Delta) + U_{\epsilon}(x)(x-\epsilon)e^{-(x-\epsilon)}.\end{aligned}$$

۷,۳,۶ پاسخ تمرین ۸,۳

قسمت (الف)

$$y'' + 4y = (1 + U_{\pi}(x)) \sin x \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[\sin x] + \mathcal{L}[U_{\pi}(x) \sin x] \\ s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2+1} + \mathcal{L}[U_{\pi}(x) \sin(x-\pi+\pi)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (s^2 + 4)\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2+1} + \mathcal{L}[-U_\pi(x) \sin(x - \pi)] \\
 (s^2 + 4)\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s} \mathcal{L}[\sin x] \quad ۵۹,۳ \\
 (s^2 + 4)\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s} \frac{1}{s^2+1} \\
 \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)} \\
 \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \frac{AS+B}{(s^2+1)} + \frac{CS+D}{(s^2+4)} \Rightarrow \\
 A = 0, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{4} \\
 y &= \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] \\
 &\quad - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right] + \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}\right] \\
 y &= \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} U_\pi(x) \sin(x - \pi) \\
 &\quad + \frac{1}{8} U_\pi(x) \sin 2(x - \pi).
 \end{aligned}$$

پاسخ تمرین ۴۵,۳ ۸,۳,۶

(الف)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{\sinh ax}{x}\right] &= \int_s^\infty \mathcal{L}[\sinh ax] du \\
 &= \int_s^\infty \frac{a}{u^2 - a^2} du \\
 &= \int_s^\infty \frac{1}{a} \frac{du}{\left(\frac{u}{a}\right)^2 - 1} \\
 \frac{u}{a} &= t, \quad \frac{du}{a} = dt \\
 u = s &\Rightarrow t = \frac{s}{a} \\
 u \rightarrow \infty &\Rightarrow t \rightarrow \infty \\
 &= \int_{\frac{s}{a}}^\infty \frac{dt}{t^2 - 1} \\
 &= -\tanh^{-1} t \Big|_{\frac{s}{a}}^\infty \\
 &= -1 + \tanh^{-1} \frac{s}{a}.
 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\int_0^x e^{-\tau t} \frac{1-e^{-t}}{t} dt\right] &= F(s) \\
 \int_0^x e^{-\tau t} \frac{e^{-\tau t}-e^{-t}}{t} dt &= f(x) \\
 \text{قضیه اساسی} &\Rightarrow f'(x) = \frac{e^{-\tau x}-e^{-x}}{x} \\
 \mathcal{L}[f'(x)] &= s\mathcal{L}[f(x)] - f(0) \quad ۲۶,۳
 \end{aligned}$$

در این مثال خاص از خاصیت ۷۵,۳ هم می‌شود مستقیماً نتیجه گرفت.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\frac{e^{-\gamma x} - e^{-\nu x}}{x}\right] \\ \Rightarrow \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \mathcal{L}[e^{-\gamma x} - e^{-\nu x}] du \\ \Rightarrow \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{s} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\left(\int_s^A \left(\frac{1}{u+\gamma} - \frac{1}{u+\nu} \right) du \right) \right] \\ \Rightarrow \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{s} \lim_{A \rightarrow \infty} [\ln(u+\gamma) - \ln(u+\nu)]_s^A \\ \Rightarrow \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{s} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\ln\left(\frac{A+\gamma}{A+\nu}\right) - \ln\left(\frac{s+\gamma}{s+\nu}\right) \right] \\ \Rightarrow \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{1}{s} \ln\left(\frac{s+\gamma}{s+\nu}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\gamma}(s^{\gamma}+1)^{\gamma}}\right] \\ \frac{1}{s^{\gamma}(s^{\gamma}+1)^{\gamma}} &= \frac{A}{s^{\gamma}} + \frac{B}{s^{\gamma}} + \frac{C}{s} + \frac{Ds+E}{(s^{\gamma}+1)^{\gamma}} + \frac{Fs+G}{s^{\gamma}+1} \\ \Rightarrow A &= 1, B = 0, C = -\gamma, D = 1, E = 0, F = \gamma, G = 0 \Rightarrow \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\gamma}(s^{\gamma}+1)^{\gamma}}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\gamma}}\right] - \gamma \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^{\gamma}+1)^{\gamma}}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\gamma s}{(s^{\gamma}+1)}\right] \\ &= \frac{x^{\gamma}}{\gamma} - \gamma + \gamma \cos x + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^{\gamma}+1)^{\gamma}}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^{\gamma}+1)^{\gamma}}\right] &= f(x) \Rightarrow \\ \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] &= \int_s^{\infty} \frac{u}{(u^{\gamma}+1)^{\gamma}} du \\ & \quad u^{\gamma} + 1 = t \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{s}{(s^{\gamma}+1)^{\gamma}}, \quad \gamma u du = dt \\ & \quad u = s \Rightarrow t = s^{\gamma} + 1 \\ \mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] &= \int_{s^{\gamma}+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \frac{dt}{t^{\gamma}} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\gamma t^{\gamma-1}} \right]_{s^{\gamma}+1}^A \\ &= \frac{1}{\gamma(s^{\gamma}+1)} \Rightarrow \\ \frac{f(x)}{x} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\gamma} \frac{1}{s^{\gamma}+1}\right] \\ &= \frac{1}{\gamma} \sin x \Rightarrow \\ f(x) &= \frac{1}{\gamma} x \sin x. \end{aligned}$$

قسمت (ه)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\sin^4 x \cos^3 x] &= ? \\
 \sin^4 x \cos^3 x &= (\sin^2 x \cos^2 x) \cos x \\
 &= \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \cos x \\
 &= \frac{1}{4} \sin^2 2x \cos x \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) \cos x \\
 &= \frac{1}{8} \cos x - \frac{1}{8} \cos 4x \cos x \\
 &= \frac{1}{8} \cos x - \frac{1}{16} (\cos 5x + \cos 3x) \Rightarrow \\
 \mathcal{L}[\sin^4 x \cos^3 x] &= \frac{1}{8} \mathcal{L}[\cos x] - \frac{1}{16} \mathcal{L}[\cos 5x] - \frac{1}{16} \mathcal{L}[\cos 3x] \\
 &= \frac{1}{8} \frac{s}{s^2+16} - \frac{1}{16} \frac{s}{s^2+25} - \frac{1}{16} \frac{s}{s^2+9}.
 \end{aligned}$$

قسمت (د)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-rs}(rs+1)}{s^2+\delta s^2+\eta s+\gamma}\right] &= U_r(x) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(rs+1)}{s^2+\delta s^2+\eta s+\gamma}\right]_{x \rightarrow x-r} \\
 s^2 + \delta s^2 + \eta s + \gamma &= (s+1)(s^2 + \epsilon s + \nu) \\
 \frac{(rs+1)}{s^2+\delta s^2+\eta s+\gamma} &= \frac{(rs+1)}{(s+1)(s^2+\epsilon s+\nu)} \\
 &= \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+\epsilon s+\nu} \\
 \Rightarrow A = -\frac{1}{\nu}, B = \frac{1}{\nu}, C = \frac{\delta}{\nu} \\
 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(rs+1)}{s^2+\delta s^2+\eta s+\gamma}\right] &= -\frac{1}{\nu} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{\nu} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\delta}{s^2+\epsilon s+\nu}\right] \\
 &= -\frac{1}{\nu} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{\nu} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\delta}{(s+r)^2+\beta}\right] + \frac{\delta}{\nu} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+r)^2+\beta}\right] \\
 &= -\frac{1}{\nu} e^{-x} + \frac{1}{\nu} e^{-rx} \cos \sqrt{\beta} x + \frac{\delta}{\nu \sqrt{\beta}} e^{-rx} \sin \sqrt{\beta} x \\
 \text{جواب نهایی} &= U_r(x) \left[-\frac{1}{\nu} e^{-(x-r)} + \frac{1}{\nu} e^{-r(x-r)} \cos \sqrt{\beta}(x-r) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\delta}{\nu \sqrt{\beta}} e^{-r(x-r)} \sin \sqrt{\beta}(x-r)\right].
 \end{aligned}$$

پاسخ تمرین ۱۱,۳,۶؟؟

قسمت (۹)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ -1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx}{1-e^{-2s}} \\ &= \frac{\int_0^1 e^{-sx} dx + \int_1^2 e^{-sx} (-1) dx}{1-e^{-2s}} \\ \int e^{-sx} dx &= -\frac{1}{s} e^{-sx} \Rightarrow \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{\left[-\frac{1}{s} e^{-sx}\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{s} e^{-sx}\right]_1^2}{1-e^{-2s}} \\ &= \frac{-\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s} e^{-s}}{1-e^{-2s}} \\ &= \frac{\frac{1}{s} (1+e^{-2s}-2e^{-s})}{1-e^{-2s}} \\ \mathcal{L}[f(x)] &= \frac{\frac{1}{s} (1-e^{-s})^2}{1-e^{-2s}} \\ &= \frac{1}{s} \times \frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}. \end{aligned}$$

پاسخ تمرین ۱۲,۳,۶ ۴۷,۳

قسمت (ج)

$$\begin{aligned} xy'' + y' + xy &= 0 \quad y(0) = 1 \\ \mathcal{L}[xy''] + \mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[xy] &= 0 \\ -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] - \frac{d}{ds} \mathcal{L}[y] &= 0 \\ -\frac{d}{ds} (s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0)) + s \mathcal{L}[y] - y(0) - \frac{d}{ds} \mathcal{L}[y] &= 0 \\ -2s \mathcal{L}[y] - s^2 \frac{d}{ds} \mathcal{L}[y] + 1 + s \mathcal{L}[y] - 1 - \frac{d}{ds} \mathcal{L}[y] &= 0 \\ (-s^2 - 1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}[y] &= (2s - s) \mathcal{L}[y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}[y]}{\mathcal{L}[y]} &= \frac{-s}{s^2+1} ds \\ \ln(\mathcal{L}[y]) &= -\frac{1}{2} \ln(s^2+1) \text{ انتگرال می‌گیریم} \\ &= \ln(s^2+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ \mathcal{L}[y] &= \frac{1}{(s^2+1)^{\frac{1}{2}}} = J_0(x) \text{ تابع بسل} \\ \mathcal{L}\left[\frac{y}{x}\right] &= \int_s^\infty \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \\ &= \sinh^{-1} s \end{aligned}$$

۱۳,۳,۶ پاسخ تمرین ۸۸,۳

قسمت (ب)

$$\begin{aligned} y'' + y &= \cos 2x - \delta(x-1) \quad y(0) = y'(0) = 0 \\ s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[\cos x] - \mathcal{L}[\delta(x-1)] \\ (s^2+1)\mathcal{L}[y] &= \frac{s}{s^2+4} - e^{-s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}[y] &= \frac{s}{(s^2+4)(s^2+1)} - \frac{e^{-s}}{(s^2+1)} \\ \Rightarrow y &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)(s^2+1)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right] \\ \frac{s}{(s^2+4)(s^2+1)} &= \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\ \Rightarrow A &= -\frac{1}{4}, B=0, C=\frac{1}{4}, D=0 \\ \Rightarrow y &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{4}s}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{4}s}{s^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right] \\ \Rightarrow y &= -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos x - U_1(x) \sin(x-1). \end{aligned}$$

مراجع